

Fiche 1 : variable aléatoire et loi

Six exercices pour maîtriser les **variables aléatoires** et leur **loi** :

- écrire Ω et décrire X comme une **fonction** sur Ω ;
- **modéliser** : choisir et définir X ;
- la loi à partir d'une **urne** ;
- la loi à partir d'un **arbre** ;
- passer de la **langue naturelle aux symboles** et inversement ;
- vrai/faux.

Pour les arbres, rappelle-toi la répétition d'épreuves de Bernoulli du chapitre 9 : on multiplie le long d'un chemin, on additionne entre chemins.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **variable aléatoire** est définie (avec son unité) avant tout calcul ;
- la **loi** est écrite sous forme de tableau et sa **somme est vérifiée** ;
- chaque événement est écrit avec les **notations** $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$.

Le modèle de rédaction pour une loi

« Soit X le nombre de boules rouges. X prend les valeurs 0, 1 et 2. $P(X = 0) = \dots$ La loi de X est donnée par le tableau suivant. Vérification : la somme des probabilités vaut 1. »

Les pièges classiques

- Oublier une **valeur possible** de X .
- Confondre $P(X \leq a)$ et $P(X = a)$.
- Oublier de **vérifier** que la somme vaut 1.

Si ta loi a une somme de 0,9, il manque 10 % de probabilité. Elle est sûrement partie en vacances avec la valeur oubliée.

Exercice 1 (★) : écrire Ω et X

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. On note X le nombre de piles obtenus.

1. Écrire l'univers Ω (on notera P pour pile et F pour face).
2. Donner $X(\omega)$ pour chaque issue ω .
3. Écrire en extension les événements $\{X = 2\}$ et $\{X \geq 2\}$.
4. En déduire $P(X = 2)$ et $P(X \geq 2)$.

Exercice 2 (★★) : modéliser avec une variable aléatoire

Pour chacune des situations suivantes, définir une variable aléatoire X adaptée (avec son unité si besoin) et donner ses valeurs possibles.

(a) On lance un dé équilibré : si le résultat est 6, on gagne 5 € ; sinon on perd 1 €.

(b) On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse au plus grand des deux résultats.

(c) Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément deux boules et on s'intéresse aux boules rouges obtenues.

Pour (a), donner ensuite la loi de X . Pour (b), calculer $P(X = 1)$ et $P(X \leq 2)$.

Exercice 3 (★★) : loi à partir d'une urne

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 5 boules numérotées 0, 3 boules numérotées 1 et 2 boules numérotées 4. On tire une boule au hasard et on note X son numéro.

1. Donner la loi de X et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.

2. Calculer $P(X \leq 1)$ et $P(X > 1)$.

3. Calculer $P(X \geq 1)$ et $P(X \leq 3)$.

Exercice 4 (★★) : loi à partir d'un arbre

Un basketteur réussit chaque lancer franc avec la probabilité 0,6, les lancers étant indépendants. Il tire trois lancers. On note X le nombre de lancers réussis et S le succès d'un lancer.

1. Dessiner l'arbre pondéré des trois lancers.

2. Donner la loi de X (on précisera les chemins correspondant à chaque valeur) et vérifier que la somme vaut 1.

3. Calculer $P(X \geq 2)$ et $P(X \leq 1)$.

Exercice 5 (★★) : langue naturelle et symboles

Une variable aléatoire X a la loi suivante :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,05	0,15	0,30	0,35	0,15

1. Vérifier que c'est bien une loi de probabilité.
2. Traduire par une phrase : $P(X \neq 2)$ et $P(X \leq 0)$. Puis écrire avec des symboles et calculer : « X est strictement inférieur à 2 », « X est au moins égal à 3 », « X est compris entre 1 et 3 (bornes incluses) ».
3. Calculer $P(X \geq 3)$ avec $P(X \leq 2)$ et vérifier.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Une variable aléatoire réelle associe un nombre réel à chaque issue de l'expérience.
2. Si X prend exactement les valeurs 1, 2 et 3, alors $P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{3}$.
3. Pour tout réel a , $P(X \leq a) + P(X > a) = 1$.
4. Il existe une variable aléatoire avec $P(X = 1) = 0,6$ et $P(X = 2) = 0,5$.

Ce qui peut tomber en contrôle

- Écrire Ω et $X(\omega)$ (exercice 1).
- Définir une variable aléatoire et ses valeurs possibles (exercice 2).
- Loi à partir d'une urne (exercice 3) ou d'un arbre (exercice 4).
- Traduire langue naturelle et symboles (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Une variable aléatoire réelle X sur Ω est :
 - A. une probabilité
 - B. une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$
 - C. un événement
 - D. un nombre fixé à l'avance
2. « X est au plus égal à 2 » s'écrit :

- A. $\{X < 2\}$
- B. $\{X \geq 2\}$
- C. $\{X \leq 2\}$
- D. $\{X = 2\}$

3. La somme des probabilités $P(X = x_i)$ d'une loi vaut :

- A. 0
- B. 1
- C. $E(X)$
- D. $V(X)$

4. X prend les valeurs 1, 2, 3 avec $P(X = 1) = 0,2$ et $P(X = 2) = 0,5$. Alors $P(X = 3) =$:

- A. 0,3
- B. 0,7
- C. 0,1
- D. 0,5

5. $P(X > 2)$ est égal à :

- A. $P(X \leq 2)$
- B. $1 - P(X \leq 2)$
- C. $1 - P(X < 2)$
- D. $P(X = 2)$