

Fiche 1 : variable aléatoire et loi

Six exercices pour maîtriser les **variables aléatoires** et leur **loi** :

- écrire Ω et décrire X comme une **fonction** sur Ω ;
- **modéliser** : choisir et définir X ;
- la loi à partir d'une **urne** ;
- la loi à partir d'un **arbre** ;
- passer de la **langue naturelle aux symboles** et inversement ;
- vrai/faux.

Pour les arbres, rappelle-toi la répétition d'épreuves de Bernoulli du chapitre 9 : on multiplie le long d'un chemin, on additionne entre chemins.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- la **variable aléatoire** est définie (avec son unité) avant tout calcul ;
- la **loi** est écrite sous forme de tableau et sa **somme est vérifiée** ;
- chaque événement est écrit avec les **notations** $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$.

Le modèle de rédaction pour une loi

« Soit X le nombre de boules rouges. X prend les valeurs 0, 1 et 2. $P(X = 0) = \dots$ La loi de X est donnée par le tableau suivant. Vérification : la somme des probabilités vaut 1. »

Les pièges classiques

- Oublier une **valeur possible** de X .
- Confondre $P(X \leq a)$ et $P(X = a)$.
- Oublier de **vérifier** que la somme vaut 1.

Si ta loi a une somme de 0,9, il manque 10 % de probabilité. Elle est sûrement partie en vacances avec la valeur oubliée.

Exercice 1 (★) : écrire Ω et X

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. On note X le nombre de piles obtenus.

1. Écrire l'univers Ω (on notera P pour pile et F pour face).
2. Donner $X(\omega)$ pour chaque issue ω .
3. Écrire en extension les événements $\{X = 2\}$ et $\{X \geq 2\}$.
4. En déduire $P(X = 2)$ et $P(X \geq 2)$.

Correction de l'exercice 1

Question 1

$\Omega = \{PPP; PPF; PFP; PFF; FPP; FPF; FFP; FFF\}$: il y a 8 issues, équiprobables car la pièce est équilibrée (chacune de probabilité $\frac{1}{8}$).

Question 2

ω	PPP	PPF	PFP	PFF	FPP	FPF	FFP	FFF
$X(\omega)$	3	2	2	1	2	1	1	0

Question 3

$\{X = 2\} = \{PPF; PFP; FPP\}$ et $\{X \geq 2\} = \{PPP; PPF; PFP; FPP\}$.

Question 4

$$P(X = 2) = \frac{3}{8} \text{ et } P(X \geq 2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 (★★) : modéliser avec une variable aléatoire

Pour chacune des situations suivantes, définir une variable aléatoire X adaptée (avec son unité si besoin) et donner ses valeurs possibles.

(a) On lance un dé équilibré : si le résultat est 6, on gagne 5 € ; sinon on perd 1 €.

(b) On lance deux dés équilibrés et on s'intéresse au plus grand des deux résultats.

(c) Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules vertes. On tire simultanément deux boules et on s'intéresse aux boules rouges obtenues.

Pour (a), donner ensuite la loi de X . **Pour (b),** calculer $P(X = 1)$ et $P(X \leq 2)$.

Correction de l'exercice 2

(a)

Soit X le gain algébrique en euros. Avec $\Omega = \{1; \dots; 6\}$, on a $X(6) = 5$ et $X(\omega) = -1$ pour $\omega \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Les valeurs possibles sont -1 et 5 . $P(X = 5) = \frac{1}{6}$ et $P(X = -1) = \frac{5}{6}$.

x_i	-1	5
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Vérification : $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$.

(b)

Soit M le plus grand des deux résultats. L'univers est formé des **36** couples $(a; b)$ et $M(a; b) = \max(a; b)$. Les valeurs possibles sont **1, 2, 3, 4, 5** et **6**.

$\{M = 1\} = \{(1; 1)\}$ donc $P(M = 1) = \frac{1}{36}$. $\{M \leq 2\}$: les deux dés valent 1 ou 2, soit $2 \times 2 = 4$ couples.

$$P(M = 1) = \frac{1}{36} \text{ et } P(M \leq 2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

(c)

Soit X le nombre de boules rouges tirées. On tire **2** boules, il y a **3** vertes : on peut tirer **0** rouge (deux vertes), **1** rouge ou **2** rouges (il y en a **2** dans l'urne).

Les valeurs possibles de X sont **0, 1** et **2**.

Exercice 3 (★★) : loi à partir d'une urne

Une urne contient **10** boules indiscernables au toucher : **5** boules numérotées **0**, **3** boules numérotées **1** et **2** boules numérotées **4**. On tire une boule au hasard et on note X son numéro.

1. Donner la loi de X et vérifier que la somme des probabilités vaut 1.
2. Calculer $P(X \leq 1)$ et $P(X > 1)$.
3. Calculer $P(X \geq 1)$ et $P(X \leq 3)$.

Correction de l'exercice 3

Question 1

Les 10 boules sont équiprobables. X prend les valeurs **0, 1** et **4**.

x_i	0	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{5}{10} = 0,5$	$\frac{3}{10} = 0,3$	$\frac{2}{10} = 0,2$

Vérification : $0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$.

Question 2

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,5 + 0,3 = 0,8.$$

$$P(X \leq 1) = 0,8 \text{ et } P(X > 1) = P(X = 4) = 0,2 \text{ (ou } 1 - 0,8).$$

Question 3

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 4) = 0,5.$$

3 n'est pas une valeur possible, mais $\{X \leq 3\}$ contient les issues où X vaut 0 ou 1.

$$P(X \geq 1) = 0,5 \text{ et } P(X \leq 3) = 0,8.$$

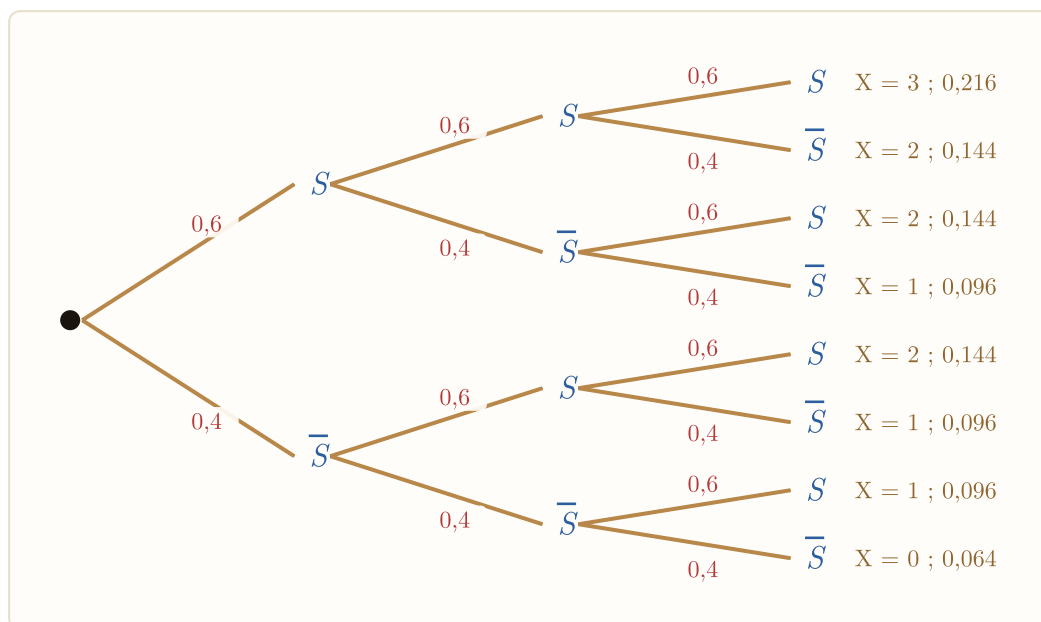
Exercice 4 (★★) : loi à partir d'un arbre

Un basketteur réussit chaque lancer franc avec la probabilité 0,6, les lancers étant indépendants. Il tire trois lancers. On note X le nombre de lancers réussis et S le succès d'un lancer.

1. Dessiner l'arbre pondéré des trois lancers.
2. Donner la loi de X (on précisera les chemins correspondant à chaque valeur) et vérifier que la somme vaut 1.
3. Calculer $P(X \geq 2)$ et $P(X \leq 1)$.

Correction de l'exercice 4

Question 1



Trois lancers francs indépendants, succès S (probabilité 0,6) : à droite, la valeur de X et la probabilité du chemin

Question 2

Les lancers sont indépendants : la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches.

$X = 0$: un chemin $(\bar{S}\bar{S}\bar{S})$, $P(X = 0) = 0,4^3 = 0,064$.

$X = 1$: trois chemins ($S\bar{S}\bar{S}$, $\bar{S}S\bar{S}$, $\bar{S}\bar{S}S$), chacun de probabilité $0,6 \times 0,4^2 = 0,096$, donc $P(X = 1) = 0,288$.

$X = 2$: trois chemins, chacun de probabilité $0,6^2 \times 0,4 = 0,144$, donc $P(X = 2) = 0,432$.

$X = 3$: un chemin (SSS), $P(X = 3) = 0,6^3 = 0,216$.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,064	0,288	0,432	0,216

Vérification : $0,064 + 0,288 + 0,432 + 0,216 = 1$.

Question 3

$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,432 + 0,216 = 0,648$.

$P(X \geq 2) = 0,648$ et $P(X \leq 1) = 0,064 + 0,288 = 0,352$ (soit $1 - 0,648$).

Exercice 5 (★★) : langue naturelle et symboles

Une variable aléatoire X a la loi suivante :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,05	0,15	0,30	0,35	0,15

- Vérifier que c'est bien une loi de probabilité.
- Traduire par une phrase : $P(X \neq 2)$ et $P(X \leq 0)$. Puis écrire avec des symboles et calculer : « X est strictement inférieur à 2 », « X est au moins égal à 3 », « X est compris entre 1 et 3 (bornes incluses) ».
- Calculer $P(X \geq 3)$ avec $P(X \leq 2)$ et vérifier.

Correction de l'exercice 5

Question 1

Chaque probabilité est positive et $0,05 + 0,15 + 0,30 + 0,35 + 0,15 = 1$.

Question 2

$P(X \neq 2)$: « la probabilité que X soit différent de 2 » ; $P(X \neq 2) = 1 - P(X = 2) = 0,70$.

$P(X \leq 0)$: « la probabilité que X soit au plus égal à 0 », c'est-à-dire que X vaille 0 : 0,05.

« X strictement inférieur à 2 » : $P(X < 2) = 0,05 + 0,15 = 0,20$.

« X au moins égal à 3 » : $P(X \geq 3) = 0,35 + 0,15 = 0,50$.

« X compris entre 1 et 3 » : $P(1 \leq X \leq 3) = 0,15 + 0,30 + 0,35 = 0,80$.

Question 3

$P(X \leq 2) = 0,05 + 0,15 + 0,30 = 0,50$ donc $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 0,50$.

On retrouve 0,50.

Exercice 6 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Une variable aléatoire réelle associe un nombre réel à chaque issue de l'expérience.
2. Si X prend exactement les valeurs 1, 2 et 3, alors $P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{3}$.
3. Pour tout réel a , $P(X \leq a) + P(X > a) = 1$.
4. Il existe une variable aléatoire avec $P(X = 1) = 0,6$ et $P(X = 2) = 0,5$.

Correction de l'exercice 6

Affirmation 1

C'est la définition : une variable aléatoire réelle est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Vrai.

Affirmation 2

Contre-exemple : pour la somme de deux pièces comptée en piles (valeurs 0, 1, 2), $P(X = 1) = \frac{1}{2}$. Les valeurs ne sont pas toujours équiprobables.

Faux.

Affirmation 3

Les événements $\{X \leq a\}$ et $\{X > a\}$ sont contraires.

Vrai.

Affirmation 4

Déjà $0,6 + 0,5 = 1,1 > 1$: la somme des probabilités de la loi dépasserait 1.

Faux.

Ce qui peut tomber en contrôle

- **Écrire** Ω et $X(\omega)$ (exercice 1).
- **Définir** une variable aléatoire et ses valeurs possibles (exercice 2).
- **Loi à partir d'une urne** (exercice 3) ou **d'un arbre** (exercice 4).
- **Traduire** langue naturelle et symboles (exercice 5).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Une variable aléatoire réelle X sur Ω est :

- A. une probabilité
- B. **une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$ (bonne réponse)**
- C. un événement
- D. un nombre fixé à l'avance

Justification : À chaque issue, elle associe un nombre réel.

2. « X est au plus égal à 2 » s'écrit :

- A. $\{X < 2\}$
- B. $\{X \geq 2\}$
- C. **$\{X \leq 2\}$ (bonne réponse)**
- D. $\{X = 2\}$

Justification : « Au plus » signifie $\leq$.

3. La somme des probabilités $P(X = x_i)$ d'une loi vaut :

- A. 0
- B. **1 (bonne réponse)**
- C. $E(X)$
- D. $V(X)$

Justification : Les événements $\{X = x_i\}$ partitionnent Ω .

4. X prend les valeurs 1, 2, 3 avec $P(X = 1) = 0,2$ et $P(X = 2) = 0,5$. Alors $P(X = 3) =$:

- A. **0,3 (bonne réponse)**
- B. 0,7
- C. 0,1
- D. 0,5

Justification : $1 - 0,2 - 0,5 = 0,3$.

5. $P(X > 2)$ est égal à :

- A. $P(X \leq 2)$
- B. $1 - P(X \leq 2)$ (bonne réponse)
- C. $1 - P(X < 2)$
- D. $P(X = 2)$

Justification : $\{X > 2\}$ est le contraire de $\{X \leq 2\}$.