

Contrôle : chapitre 10, Variables aléatoires

Durée : 45 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (7 points) : Un jeu de jetons

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 4 jetons portent le nombre 0, 3 jetons portent le nombre 2, 2 jetons portent le nombre 5 et 1 jeton porte le nombre 10. Un joueur tire un jeton au hasard et reçoit en euros la somme indiquée sur ce jeton. On note X la somme reçue.

1. Donner la loi de probabilité de X sous forme de tableau. (1,5 points)
2. Calculer $P(X \geq 2)$. (0,5 point)
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat. (1 point)
4. Calculer la variance $V(X)$ à l'aide de la formule de König-Huygens, puis l'écart type $\sigma(X)$ arrondi au centième. (1,5 points)
5. Pour jouer, le joueur doit verser une mise de 3 €. On note $G = X - 3$ son gain algébrique. Déterminer $E(G)$, $V(G)$ et $\sigma(G)$, puis expliquer si le jeu est favorable au joueur. (1,5 points)
6. Quelle mise m rendrait le jeu équitable ? Justifier. (1 point)

Exercice 2 (7 points) : Un questionnaire à choix multiples

Un questionnaire comporte 4 questions indépendantes. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées et une seule est exacte. Un candidat n'a révisé aucune question et répond au hasard à chacune d'elles. On note X le nombre de bonnes réponses du candidat.

- Justifier que la situation est une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques et en donner le nombre n d'épreuves et la probabilité p de succès. (1 point)
- a) Écrire tous les chemins de l'arbre qui comportent exactement deux succès (on notera S un succès et E un échec). b) En déduire que $P(X = 2) = \frac{27}{128}$. (1,5 points)
- Donner la loi de X sous forme de tableau (valeurs exactes sous forme de fractions) et vérifier que la somme des probabilités vaut 1. (1,5 points)
- Calculer la probabilité que le candidat obtienne au moins une bonne réponse. (1 point)
- Calculer $E(X)$ et $V(X)$ (formule de König-Huygens) et interpréter $E(X)$. (1 point)
- Le candidat est admis s'il obtient au moins 3 bonnes réponses. Calculer la probabilité qu'il soit admis en répondant au hasard, puis commenter. (1 point)

Exercice 3 (6 points) : Épreuve de Bernoulli, tirs et Python

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues : le succès, de probabilité p , et l'échec, de probabilité $q = 1 - p$, avec $0 < p < 1$. On note B la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Un basketteur réussit chaque lancer franc avec la probabilité 0,6, indépendamment des autres lancers. Il effectue 3 lancers francs et on note Y le nombre de lancers réussis.

On considère le script Python suivant, où n désigne un nombre de lancers francs :

```
n = 1
while 1 - 0.4**n < 0.9:
    n = n + 1
print(n)
```

- Démontrer que $E(B) = p$ et que $V(B) = pq$. (2 points)
- Justifier que la situation est une répétition de 3 épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques, puis calculer la probabilité que le basketteur réussisse au moins un lancer franc sur les 3. (1 point)
- a) Justifier que la probabilité de réussir au moins un lancer franc sur n lancers (avec $n \geq 1$) vaut $1 - 0,4^n$. b) Quelle valeur affiche le script de l'énoncé ? Justifier et interpréter. (1,5 points)
- Donner la loi de Y sous forme de tableau (à partir des chemins de l'arbre), puis calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$ (arrondi au centième). (1,5 points)