

Contrôle : chapitre 10, Variables aléatoires

Durée : 45 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (7 points) : Un jeu de jetons

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 4 jetons portent le nombre 0, 3 jetons portent le nombre 2, 2 jetons portent le nombre 5 et 1 jeton porte le nombre 10. Un joueur tire un jeton au hasard et reçoit en euros la somme indiquée sur ce jeton. On note X la somme reçue.

1. Donner la loi de probabilité de X sous forme de tableau. (1,5 points)
2. Calculer $P(X \geq 2)$. (0,5 point)
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat. (1 point)
4. Calculer la variance $V(X)$ à l'aide de la formule de König-Huygens, puis l'écart type $\sigma(X)$ arrondi au centième. (1,5 points)
5. Pour jouer, le joueur doit verser une mise de 3 €. On note $G = X - 3$ son gain algébrique. Déterminer $E(G)$, $V(G)$ et $\sigma(G)$, puis expliquer si le jeu est favorable au joueur. (1,5 points)
6. Quelle mise m rendrait le jeu équitable ? Justifier. (1 point)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (1,5 points)

Les valeurs possibles de X sont 0, 2, 5 et 10. Les tirages sont équiprobables, donc $P(X = x) = \frac{\text{nombre de jetons portant } x}{10}$.

x_i	0	2	5	10
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Vérification : $\frac{4 + 3 + 2 + 1}{10} = 1$.

Barème : 0,5 point pour les quatre valeurs possibles de X ; 0,5 point pour les quatre probabilités ; 0,5 point pour la vérification de la somme égale à 1.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (0,5 point)

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 5) + P(X = 10) = \frac{3 + 2 + 1}{10} = 0,6.$$

Barème : 0,5 point pour la somme des trois probabilités et le résultat.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (1 point)

$$E(X) = 0 \times 0,4 + 2 \times 0,3 + 5 \times 0,2 + 10 \times 0,1 = 0,6 + 1 + 1 = 2,6.$$

$E(X) = 2,6$: en répétant le jeu un très grand nombre de fois, la somme reçue vaut en moyenne 2,60 € par partie.

Barème : 0,5 point pour le calcul de $E(X)$; 0,5 point pour l'interprétation en moyenne sur un grand nombre de parties.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (1,5 points)

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,4 + 2^2 \times 0,3 + 5^2 \times 0,2 + 10^2 \times 0,1 = 1,2 + 5 + 10 = 16,2.$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 16,2 - 2,6^2 = 16,2 - 6,76 = 9,44.$$

$$V(X) = 9,44 \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{9,44} \approx 3,07.$$

Barème : 0,5 point pour $E(X^2) = 16,2$; 0,5 point pour $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 9,44$; 0,5 point pour $\sigma(X) \approx 3,07$.

Correction de l'exercice 1, question 5

Question 5 (1,5 points)

$$\text{Par linéarité de l'espérance : } E(G) = E(X) - 3 = 2,6 - 3 = -0,4.$$

Loi de G : les valeurs $-3, -1, 2, 7$ ont les probabilités $0,4, 0,3, 0,2, 0,1$. Alors $E(G^2) = 9 \times 0,4 + 1 \times 0,3 + 4 \times 0,2 + 49 \times 0,1 = 9,6$ et $V(G) = 9,6 - (-0,4)^2 = 9,44$.

$$\text{Donc } \sigma(G) = \sqrt{9,44} \approx 3,07.$$

$E(G) = -0,4 < 0$: le jeu est **défavorable** au joueur, qui perd en moyenne 0,40 € par partie (soit environ 40 € de perte pour 100 parties).

Barème : 0,5 point pour $E(G) = -0,4$ avec la propriété utilisée ; 0,5 point pour $V(G) = 9,44$ via la loi de G et $\sigma(G)$; 0,5 point pour la conclusion argumentée avec le signe de $E(G)$.

Correction de l'exercice 1, question 6

Question 6 (1 point)

Un jeu est équitable lorsque l'espérance du gain algébrique est nulle. Le gain est $X - m$ et $E(X - m) = E(X) - m = 2,6 - m$.

$E(X - m) = 0 \iff m = 2,6$: la mise équitable est de 2,60 €.

Barème : 0,5 point pour la condition « espérance du gain nulle » ; 0,5 point pour la valeur $m = 2,6$.

Exercice 2 (7 points) : Un questionnaire à choix multiples

Un questionnaire comporte 4 questions indépendantes. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées et une seule est exacte. Un candidat n'a révisé aucune question et répond au hasard à chacune d'elles. On note X le nombre de bonnes réponses du candidat.

- Justifier que la situation est une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques et en donner le nombre n d'épreuves et la probabilité p de succès. (1 point)
- a) Écrire tous les chemins de l'arbre qui comportent exactement deux succès (on notera S un succès et E un échec). b) En déduire que $P(X = 2) = \frac{27}{128}$. (1,5 points)
- Donner la loi de X sous forme de tableau (valeurs exactes sous forme de fractions) et vérifier que la somme des probabilités vaut 1. (1,5 points)
- Calculer la probabilité que le candidat obtienne au moins une bonne réponse. (1 point)
- Calculer $E(X)$ et $V(X)$ (formule de König-Huygens) et interpréter $E(X)$. (1 point)
- Le candidat est admis s'il obtient au moins 3 bonnes réponses. Calculer la probabilité qu'il soit admis en répondant au hasard, puis commenter. (1 point)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (1 point)

Chaque question est une épreuve à **deux issues** : succès S « la réponse est exacte » ou échec $\overline{S}$. Les questions sont **indépendantes** et, le candidat répondant au hasard, la probabilité de succès est la **même** à chaque question : $p = \frac{1}{4}$.

On répète $n = 4$ fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4}$; X est le nombre de succès. On note $q = 1 - p = \frac{3}{4}$ et on représente la situation par un arbre à 4 niveaux.

Barème : 0,5 point pour les trois justifications (deux issues, indépendance, même p) ; 0,5 point pour $n = 4$, $p = \frac{1}{4}$ et le rôle de X (nombre de succès).

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (1,5 points)

a) Il y a 6 chemins : $SSEE, SESE, SEES, ESSE, ESES, EESS$.

b) Chacun de ces chemins a pour probabilité $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{256}$.

Donc $P(X = 2) = 6 \times \frac{9}{256} = \frac{54}{256}$.

$P(X = 2) = \frac{27}{128} \approx 0,211$.

Barème : 0,5 point pour les six chemins, sans oubli ni doublon ; 0,5 point pour la probabilité $\frac{9}{256}$ d'un chemin ; 0,5 point pour le produit par 6 et la simplification.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (1,5 points)

Le nombre de chemins comportant k succès vaut 1, 4, 6, 4, 1 pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (pour $k = 1$: le succès est à l'une des 4 positions ; pour $k = 3$: l'échec est à l'une des 4 positions).

$P(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$; $P(X = 1) = 4 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{108}{256}$; $P(X = 3) = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{3}{4} = \frac{12}{256}$; $P(X = 4) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$.

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{81}{256}$	$\frac{108}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

Vérification : $\frac{81 + 108 + 54 + 12 + 1}{256} = \frac{256}{256} = 1$.

Barème : 0,5 point pour les nombres de chemins 1, 4, 6, 4, 1 ; 0,5 point pour les probabilités des quatre valeurs manquantes ; 0,5 point pour le tableau complet et la vérification de la somme.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1 point)

L'événement contraire de $\{X \geq 1\}$ est $\{X = 0\}$ (aucune bonne réponse).

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{81}{256} = \frac{175}{256}.$$

$$P(X \geq 1) = \frac{175}{256} \approx 0,684.$$

Barème : 0,5 point pour le passage par l'événement contraire ; 0,5 point pour le résultat exact et sa valeur approchée.

Correction de l'exercice 2, question 5

Question 5 (1 point)

$$E(X) = \frac{108 + 2 \times 54 + 3 \times 12 + 4 \times 1}{256} = \frac{256}{256} = 1.$$

$$E(X^2) = \frac{108 + 4 \times 54 + 9 \times 12 + 16 \times 1}{256} = \frac{448}{256} = \frac{7}{4} \text{ puis } V(X) = \frac{7}{4} - 1^2 = \frac{3}{4} \text{ (König-Huygens).}$$

$E(X) = 1$ et $V(X) = \frac{3}{4}$: en répondant au hasard, le candidat obtient en moyenne une bonne réponse sur les quatre questions.

Barème : 0,5 point pour $E(X) = 1$; 0,5 point pour $V(X) = \frac{3}{4}$ et l'interprétation de $E(X)$.

Correction de l'exercice 2, question 6

Question 6 (1 point)

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{12}{256} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256}.$$

$P(X \geq 3) = \frac{13}{256} \approx 0,051$: en répondant au hasard, le candidat n'est admis que dans environ 5 % des cas.

Barème : 0,5 point pour $P(X \geq 3) = \frac{13}{256}$; 0,5 point pour la valeur approchée et le commentaire.

Exercice 3 (6 points) : Épreuve de Bernoulli, tirs et Python

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues : le succès, de probabilité p , et l'échec, de probabilité $q = 1 - p$, avec $0 < p < 1$. On note B la variable aléatoire qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.

Un joueur réussit chaque lancer franc avec la probabilité 0,6, indépendamment des autres lancers. Il effectue 3 lancers francs et on note Y le nombre de lancers réussis.

On considère le script Python suivant, où n désigne un nombre de lancers francs :

```
n = 1
while 1 - 0.4**n < 0.9:
    n = n + 1
print(n)
```

1. Démontrer que $E(B) = p$ et que $V(B) = pq$. (2 points)
2. Justifier que la situation est une répétition de 3 épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques, puis calculer la probabilité que le joueur réussisse au moins un lancer franc sur les 3. (1 point)
3. a) Justifier que la probabilité de réussir au moins un lancer franc sur n lancers (avec $n \geq 1$) vaut $1 - 0,4^n$. b) Quelle valeur affiche le script de l'énoncé ? Justifier et interpréter. (1,5 points)
4. Donner la loi de Y sous forme de tableau (à partir des chemins de l'arbre), puis calculer $E(Y)$, $V(Y)$ et $\sigma(Y)$ (arrondi au centième). (1,5 points)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (2 points)

La loi de B est : $P(B = 1) = p$ et $P(B = 0) = q$.

$$E(B) = 0 \times q + 1 \times p = p.$$

$$E(B^2) = 0^2 \times q + 1^2 \times p = p, \text{ donc d'après la formule de König-Huygens : } V(B) = E(B^2) - (E(B))^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

$$E(B) = p \text{ et } V(B) = pq.$$

Barème : 0,5 point pour la loi de B ; 0,5 point pour $E(B) = p$; 0,5 point pour $E(B^2) = p$; 0,5 point pour $V(B) = p - p^2 = pq$.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (1 point)

Chaque lancer a deux issues (réussi ou raté), les lancers sont indépendants et la probabilité de réussite est la même, $p = 0,6$: on répète $n = 3$ fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre $0,6$. On la représente par un arbre à 3 niveaux.

L'événement contraire de $\{Y \geq 1\}$ est $\{Y = 0\}$: aucun lancer n'est réussi, soit un seul chemin de probabilité $0,4^3 = 0,064$.

$$P(Y \geq 1) = 1 - 0,4^3 = 1 - 0,064 = 0,936.$$

Barème : 0,5 point pour la répétition d'épreuves de Bernoulli justifiée ; 0,5 point pour l'événement contraire, $P(Y = 0) = 0,064$ et $P(Y \geq 1) = 0,936$.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (1,5 points)

a) Comme à la question précédente, l'événement contraire est « aucun lancer réussi » : un seul chemin, de probabilité $0,4^n$; la probabilité cherchée vaut donc $1 - 0,4^n$.

b) Le script teste la condition $1 - 0,4^n < 0,9$ et augmente n de 1 tant qu'elle est vraie :

n	1	2	3
$1 - 0,4^n$	0,6	0,84	0,936
$1 - 0,4^n < 0,9$?	oui	oui	non

Le script s'arrête dès que $1 - 0,4^n \geq 0,9$, donc il affiche **3**. Il faut au moins 3 lancers francs pour que la probabilité de réussir au moins un lancer atteigne ou dépasse 0,9.

Barème : 0,5 point pour la formule $1 - 0,4^n$ justifiée ; 0,5 point pour les valeurs successives de $1 - 0,4^n$ (ou leur comparaison à 0,9) ; 0,5 point pour la valeur affichée 3 et son interprétation.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1,5 points)

Avec $p = 0,6$ et $q = 0,4$, le nombre de chemins à k succès est 1, 3, 3, 1 pour $k = 0, 1, 2, 3$:

$$P(Y = 0) = 0,4^3 = 0,064 ; P(Y = 1) = 3 \times 0,6 \times 0,4^2 = 0,288 ; P(Y = 2) = 3 \times 0,6^2 \times 0,4 = 0,432 ; P(Y = 3) = 0,6^3 = 0,216.$$

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	0,064	0,288	0,432	0,216

$$E(Y) = 0,288 + 2 \times 0,432 + 3 \times 0,216 = 0,288 + 0,864 + 0,648 = 1,8.$$

$$E(Y^2) = 0,288 + 4 \times 0,432 + 9 \times 0,216 = 0,288 + 1,728 + 1,944 = 3,96 \text{ puis } V(Y) = 3,96 - 1,8^2 = 0,72.$$

$E(Y) = 1,8$, $V(Y) = 0,72$ et $\sigma(Y) = \sqrt{0,72} \approx 0,85$. En moyenne, le basketteur réussit 1,8 lancer franc sur 3.

Barème : 0,5 point pour la loi de Y (tableau, somme égale à 1) ; 0,5 point pour $E(Y) = 1,8$; 0,5 point pour $V(Y) = 0,72$ et $\sigma(Y) \approx 0,85$.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	7
Exercice 2	7
Exercice 3	6
Total	20