

Second degré : exercices de synthèse

Quatre exercices complets, au format d'un devoir :

- l'étude complète d'une fonction du second degré : formes, racines, signe, variations, inéquation ;
- un enclos d'aire maximale, avec un intervalle de rentabilité ;
- une équation avec un paramètre : nombre de solutions, racine double, condition sur le produit ;
- le choix de la forme adaptée : forme canonique, factorisation directe, signe d'une forme factorisée, liste Python.

Les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une excellente copie :

- Δ calculé et son signe donné ;
- formule citée ;
- vérifications écrites ;
- conclusion **en contexte**.

Elles suivent le Guide de rédaction général et celui du chapitre. **Durée conseillée : 25 minutes par exercice, sur papier, sans regarder la correction.**

Comment t'entraîner efficacement

- Chronomètre-toi et rédige tout, comme en devoir.
- Pour chaque question, écris **d'abord** le discriminant ou la formule utilisée.
- Si tu bloques sur une question, écris ce que tu sais et passe à la suivante.
- À la fin de chaque exercice, ouvre « Points clés attendus » : c'est la liste de ce que le correcteur cherche.

Exercice 1 : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe.

1. Écrire $f(x)$ sous forme canonique. En déduire le sommet de $\mathcal{C}$, le tableau de variations de f et l'extremum.
2. Résoudre $f(x) = 0$ et factoriser $f(x)$.
3. Dresser le tableau de signes de $f(x)$.
4. Résoudre $f(x) \geq 6$.

Correction de la question 1

On complète le carré : $f(x) = -2(x^2 - 2x) + 6 = -2[(x - 1)^2 - 1] + 6 = -2(x - 1)^2 + 2 + 6$.

$$f(x) = -2(x - 1)^2 + 8$$

$$\text{Vérification : } -2(x - 1)^2 + 8 = -2x^2 + 4x - 2 + 8 = -2x^2 + 4x + 6$$

Le sommet de $\mathcal{C}$ est $S(1; 8)$. Comme $a = -2 < 0$: f est croissante sur $] -\infty; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

f admet un maximum égal à 8, atteint en $x = 1$.

Correction de la question 2

$$f(x) = 0 \iff -2x^2 + 4x + 6 = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0. \Delta = 4 + 12 = 16 > 0. \text{ Racines : } \\ x_1 = \frac{2 - 4}{2} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{2 + 4}{2} = 3.$$

$$S = \{-1; 3\}$$

$$f(x) = -2(x + 1)(x - 3)$$

Correction de la question 3

f a pour racines -1 et 3 et $a = -2 < 0$. Elle est positive entre les racines et négative à l'extérieur.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$f(x) > 0 \text{ sur }]-1; 3[\text{ et } f(x) < 0 \text{ sur }]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$$

Correction de la question 4

$$f(x) \geq 6 \iff -2x^2 + 4x + 6 \geq 6 \iff -2x^2 + 4x \geq 0 \iff -2x(x - 2) \geq 0.$$

La fonction $x \mapsto -2x(x - 2)$ a pour racines 0 et 2 et $a = -2 < 0$: il est positif ou nul entre les racines.

$$S = [0; 2]$$

Points clés attendus pour l'exercice 1

- **Q1** : complétion du carré menée jusqu'au bout, forme canonique **vérifiée**, sommet, variations avec le signe de a .
- **Q2** : Δ **calculé**, deux racines, factorisation avec le **facteur** a .
- **Q3** : tableau de signes justifié par $a < 0$.
- **Q4** : inéquation ramenée à une fonction du second degré, racines, signe de a , ensemble S avec les bons crochets.

Exercice 2 : un enclos

Un éleveur dispose de 40 m de grillage pour construire un enclos rectangulaire adossé à un mur : le côté le long du mur n'est pas clôturé. On note x la longueur, en mètres, des deux côtés perpendiculaires au mur.

1. Exprimer la longueur du côté parallèle au mur, puis l'aire $A(x)$ de l'enclos. Préciser l'intervalle de x .
2. Déterminer les dimensions de l'enclos d'aire maximale et cette aire.
3. Pour quelles valeurs de x l'aire est-elle supérieure ou égale à 150 m² ?

Correction de la question 1

Le grillage sert pour deux côtés de longueur x et un côté parallèle au mur : la longueur de ce côté est $40 - 2x$. Les longueurs sont positives : $x > 0$ et $40 - 2x > 0$, donc $x \in]0; 20[$.

$$A(x) = x(40 - 2x)$$

$$A(x) = -2x^2 + 40x, \text{ pour } x \in]0; 20[$$

Correction de la question 2

On complète le carré : $A(x) = -2(x^2 - 20x) = -2[(x - 10)^2 - 100] = -2(x - 10)^2 + 200$. Comme $a = -2 < 0$, A admet un maximum en $x = 10$, et $10 \in]0; 20[$:

$$A(10) = -200 + 400 = 200$$

L'aire maximale est 200 m², pour $x = 10$ m. Les dimensions sont 10 m sur $40 - 20 = 20$ m.

Correction de la question 3

$A(x) \geq 150 \iff -2x^2 + 40x - 150 \geq 0 \iff x^2 - 20x + 75 \leq 0$. $\Delta = 400 - 300 = 100 > 0$, donc les racines sont $\frac{20-10}{2} = 5$ et $\frac{20+10}{2} = 15$. Comme $a = 1 > 0$, la fonction est négative ou nulle entre les racines : $x \in [5; 15]$. Cet intervalle est contenu dans $]0; 20[$.

L'aire est supérieure ou égale à 150 m^2 pour $x \in [5; 15]$.

Points clés attendus pour l'exercice 2

- **Q1** : intervalle de x justifié par les longueurs positives, fonction A écrite.
- **Q2** : sommet dans l'intervalle, valeur du maximum, **dimensions** données.
- **Q3** : inéquation ramenée à une fonction du second degré, Δ , racines, signe, intervalle contrôlé dans $]0; 20[$.

Exercice 3 : une équation avec paramètre

Pour tout réel m , on considère l'équation $(E_m) : x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$.

1. Calculer le discriminant de (E_m) en fonction de m .
2. Discuter, selon m , le nombre de solutions de (E_m) .
3. Pour $m > -\frac{1}{2}$, donner les solutions de (E_m) et vérifier avec $m = 0$.
4. Pour $m > -\frac{1}{2}$, déterminer m pour que le produit des solutions soit égal à 4.

Correction de la question 1

$$a = 1, b = -2(m+1), c = m^2.$$

$$\Delta = 4(m+1)^2 - 4m^2 = 4(m^2 + 2m + 1 - m^2) = 4(2m + 1)$$

$$\Delta = 8m + 4$$

Correction de la question 2

$$\Delta > 0 \iff 8m + 4 > 0 \iff m > -\frac{1}{2} : \text{deux solutions.}$$

$$\Delta = 0 \iff m = -\frac{1}{2} : \text{une solution.}$$

$$\Delta < 0 \iff m < -\frac{1}{2} : \text{aucune solution.}$$

Correction de la question 3

Pour $m > -\frac{1}{2}$: $x = \frac{2(m+1) \pm \sqrt{4(2m+1)}}{2}$

$$x_1 = m + 1 - \sqrt{2m+1} \text{ et } x_2 = m + 1 + \sqrt{2m+1}$$

Vérification avec $m = 0$: $x_1 = 1 - 1 = 0$ et $x_2 = 1 + 1 = 2$. L'équation est $x^2 - 2x = 0$, de solutions 0 et 2

Correction de la question 4

D'après la relation sur le produit des racines, $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m^2$.

$$m^2 = 4 \iff m = 2 \text{ ou } m = -2. \text{ La condition } m > -\frac{1}{2} \text{ exclut } -2.$$

$$m = 2$$

Vérification : pour $m = 2$, l'équation est $x^2 - 6x + 4 = 0$, de discriminant $20 > 0$ et de produit 4

Points clés attendus pour l'exercice 3

- **Q1** : développement correct de Δ .
- **Q2** : trois cas justifiés par le signe de Δ , avec m et $-\frac{1}{2}$.
- **Q3** : formules des racines avec $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2m+1}$ simplifié, vérification pour $m = 0$.
- **Q4** : produit $\frac{c}{a}$, solution écartée car hors de la condition, vérification.

Exercice 4 : choisir la forme adaptée

Soit $f(x) = -x^2 + 4x + 5$.

1. Vérifier que, pour tout réel x , $f(x) = -(x-2)^2 + 9 = -(x+1)(x-5)$.
2. Résoudre $f(x) = 0$ sans calculer de discriminant, puis dresser le tableau de signes de $f(x)$.
3. Donner le tableau de variations de f et son extremum.
4. Résoudre $f(x) = 5$, puis $f(x) \geq 5$.
5. On exécute `[x for x in range(-3, 8) if -x*x + 4*x + 5 > 0]`. Quelle liste obtient-on ? Quel lien avec la question 2 ?

Correction de la question 1

On développe : $-(x-2)^2 + 9 = -x^2 + 4x - 4 + 9 = -x^2 + 4x + 5$ et $-(x+1)(x-5) = -(x^2 - 4x - 5) = -x^2 + 4x + 5$.

Correction de la question 2

La forme factorisée donne $f(x) = 0 \iff (x+1)(x-5) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 5$. $S = \{-1; 5\}$. Les racines, rangées dans l'ordre croissant, sont $-1 < 5$ et $a = -1 < 0$: f est positive entre les racines.

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f(x) > 0$ sur $] -1; 5[$ et $f(x) < 0$ sur $] -\infty; -1[\cup] 5; +\infty[$

Correction de la question 3

La forme canonique $-(x-2)^2 + 9$ donne le sommet $S(2; 9)$. Comme $a = -1 < 0$, f est croissante sur $] -\infty; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$.

f admet un maximum égal à 9, atteint en $x = 2$.

Correction de la question 4

La forme développée est la plus rapide : $f(x) = 5 \iff -x^2 + 4x = 0 \iff -x(x-4) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 4$. $S = \{0; 4\}$.

Pour l'inéquation : $-x(x - 4) \geq 0$ a pour racines 0 et 4 et $a = -1 < 0$: la fonction est positive ou nulle entre les racines.

$$f(x) \geq 5 \iff x \in [0; 4]$$

Correction de la question 5

La condition $-x^2 + 4x + 5 > 0$ est celle de la question 2, dont l'ensemble solution est $] -1; 5[$: les entiers de $[-3; 7]$ dans cet intervalle sont 0, 1, 2, 3 et 4.

La liste obtenue est [0, 1, 2, 3, 4].

Points clés attendus pour l'exercice 4

- **Q1** : deux développements écrits, aucune forme confondue avec une autre.
- **Q2** : factorisation utilisée (pas de Δ), racines rangées dans l'ordre croissant, tableau de signes justifié par $a < 0$.
- **Q3** : forme canonique utilisée pour le sommet et l'extremum, sens de variation justifié par le signe de a .
- **Q4** : forme développée choisie, factorisation directe, ensemble S avec les bons crochets.
- **Q5** : condition de la liste identifiée à une inéquation, liste donnée.

Les réflexes à retenir

- **Cherche une factorisation directe** ; sinon **calcule Δ** , donne son signe, puis conclus.
- **Choisis la forme adaptée** : développée, canonique ou factorisée.
- **Vérifie** ton résultat : développer une forme canonique, tester une racine.
- Un **problème concret** : inconnue, intervalle, fonction, étude, conclusion **avec l'unité**.
- Une **inéquation** : racines, signe de a , ensemble S .
- Un **paramètre** : étudie le signe de Δ en fonction de m , en trois cas.