

Second degré

Nom : _____

Fiche Standard

Date : _____

Exercice S1 : Étude complète d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Écrire $f(x)$ sous forme canonique. En déduire le sommet de $\mathcal{C}$.
2. Résoudre $f(x) = 0$ et factoriser $f(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f et le tableau de signes de $f(x)$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) \leq -4$.
5. Soit d la droite d'équation $y = x - 4$. Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de d .

Exercice S2 : Une recette à optimiser

Une salle de 400 places propose un spectacle. Au prix de 20 € la place, 200 spectateurs viennent. Une étude montre que chaque baisse de 1 € du prix attire 20 spectateurs supplémentaires. On note x la baisse de prix, en euros, avec $x \geq 0$.

1. Exprimer en fonction de x le prix de la place et le nombre de spectateurs. Montrer que $x \in [0; 10]$.
2. Montrer que la recette $R(x)$, en euros, vérifie $R(x) = -20x^2 + 200x + 4000$.
3. Déterminer la baisse qui rend la recette maximale, le prix correspondant, le nombre de spectateurs et la recette obtenue.
4. Pour quelles baisses la recette est-elle supérieure ou égale à 4320 €?
5. Existe-t-il une baisse non nulle donnant la même recette que le prix initial? Interpréter.

Exercice S3 : Équation à paramètre

Pour tout réel m , on considère l'équation $(E_m) : x^2 - 2mx + m + 2 = 0$.

1. Calculer le discriminant Δ_m et le factoriser.
2. Discuter, selon les valeurs de m , le nombre de solutions réelles de (E_m) .
3. Résoudre (E_m) pour $m = 3$, puis pour $m = -1$.
4. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles (E_m) admet deux solutions de signes contraires.

Exercice S4 : Se ramener au second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$;
2. $2x - 7\sqrt{x} + 3 = 0$ (en posant $X = \sqrt{x}$);
3. $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.

Exercice S5 : Quotients

1. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ l'équation $\frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'équation $x + 3 = \frac{4}{x}$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ l'inéquation $\frac{x^2 - x - 6}{x + 1} \geq 0$ à l'aide d'un tableau de signes.

Exercice S6 : Un rectangle de périmètre et de diagonale donnés

1. Un rectangle a pour périmètre 34 cm et pour diagonale 13 cm. On note L sa longueur et ℓ sa largeur. Calculer $L + \ell$ et $L\ell$, puis déterminer L et ℓ .
2. Montrer qu'il n'existe aucun rectangle de périmètre 34 cm et de diagonale 11 cm.
3. Soit δ la diagonale d'un rectangle de périmètre 34 cm. Montrer que $\delta \geq \frac{17}{\sqrt{2}}$ et préciser le cas

d'égalité.

Exercice S7 : Parabole et droite

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 - 2x + 3$. Pour tout réel m , on note d_m la droite d'équation $y = 2x + m$.

1. Montrer que les abscisses des points communs à $\mathcal{P}$ et d_m sont les solutions de $x^2 - 4x + 3 - m = 0$.
2. Discuter, selon m , le nombre de points communs à $\mathcal{P}$ et d_m .
3. Pour quelle valeur de m la droite d_m a-t-elle un unique point commun avec $\mathcal{P}$? Donner les coordonnées de ce point.
4. Pour $m = 0$, déterminer les coordonnées des points communs.

Exercice S8 : Une arche parabolique

Une arche de pont a la forme d'une parabole. Dans un repère d'unité 1 m, elle repose sur le sol (axe des abscisses) en deux points d'abscisses 0 et 40, et sa hauteur maximale est 16 m. On note $h(x)$ la hauteur de l'arche à l'abscisse $x \in [0; 40]$.

1. Justifier que $h(x) = a x(x - 40)$, puis que $a = -0,04$.
2. Calculer la hauteur de l'arche à 5 m de l'une des extrémités.
3. Un objet rectangulaire de hauteur 12 m est placé sous l'arche, posé sur le sol. Quelle est la largeur maximale de cet objet pour qu'il puisse passer sous l'arche, centré? Un objet de largeur 22 m peut-il passer?
4. Quelle est la hauteur maximale d'un véhicule rectangulaire de largeur 10 m passant sous l'arche, centré?

Exercice S9 : Python

On considère le script suivant.

```
def f(x):
    return 2*x*x - 3*x - 14

compteur = 0
liste = []
for n in range(-20, 21):
    if f(n) <= 0:
        compteur = compteur + 1
        liste.append(n)
print(compteur)
print(liste)
```

1. Quelles valeurs ce script affiche-t-il? Justifier par le calcul, en résolvant l'inéquation $2x^2 - 3x - 14 \leq 0$.
2. Que deviendrait l'affichage si on remplaçait $f(n) \leq 0$ par $f(n) == 0$? Expliquer.
3. On souhaite une fonction `racines(a, b, c)` qui renvoie la liste des racines réelles dans l'ordre croissant.

```
from math import sqrt

def racines(a, b, c):
    d = b*b - 4*a*c
    if d < 0:
        return []
    elif d == 0:
        return [ ..... ]
    else:
        x1 = (-b - sqrt(d)) / (2*a)
```

```
x2 = (-b + sqrt(d)) / (2*a)
return [x1, x2]
```

Compléter la ligne manquante. Cette fonction renvoie-t-elle bien les racines dans l'ordre croissant lorsque $a < 0$? Tester avec $-x^2 + 3x + 4$ et corriger si nécessaire.

4. On exécute `for r in racines(2, -3, -14):` suivi de l'instruction `print(r, f(r))` (indentée), avec la fonction `f` du début de l'exercice. Quels affichages obtient-on?

Exercice S10 : Un polynôme de degré 3

Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

1. Vérifier que 3 est racine de P .
2. Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout réel x , $P(x) = (x - 3)(ax^2 + bx + c)$.
3. En déduire les solutions de l'équation $P(x) = 0$ et une factorisation de $P(x)$ en produit de trois facteurs du premier degré.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$ à l'aide d'un tableau de signes.