

Corrigé : Second degré**Fiche Standard****S1.**

1. $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$: $\alpha = -\frac{-1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1$ et $\beta = f(1) = \frac{1}{2} - 1 - 4 = -\frac{9}{2}$. Donc $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{9}{2}$.
Vérification : $\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$. Le sommet de $\mathcal{C}$ est $S\left(1; -\frac{9}{2}\right)$.
2. $f(x) = 0 \iff \frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0 \iff x^2 - 2x - 8 = 0$. $\Delta = 4 + 32 = 36 > 0$, donc $x = \frac{2 \pm 6}{2}$: -2 ou 4 . $S = \{-2; 4\}$ et $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-4)$.
3. Comme $a = \frac{1}{2} > 0$, f est décroissante sur $] -\infty; 1]$, croissante sur $[1; +\infty[$, de minimum $-\frac{9}{2}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-\frac{9}{2}$	$+\infty$

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

4. $f(x) \leq -4 \iff \frac{1}{2}x^2 - x \leq 0 \iff \frac{1}{2}x(x-2) \leq 0$. Racines 0 et 2 , $a = \frac{1}{2} > 0$: négatif ou nul entre les racines. $S = [0; 2]$.
5. $f(x) - (x-4) = \frac{1}{2}x^2 - 2x = \frac{1}{2}x(x-4)$, de racines 0 et 4 avec $a = \frac{1}{2} > 0$. Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de d sur $] -\infty; 0[\cup]4; +\infty[$, en dessous de d sur $]0; 4[$, et les deux courbes se coupent en $(0; -4)$ et $(4; 0)$.

S2.

1. Le prix est $20 - x$ et le nombre de spectateurs est $200 + 20x$. Une baisse est positive ou nulle, donc $x \geq 0$; la salle contient 400 places, donc $200 + 20x \leq 400$, soit $x \leq 10$. Ainsi $x \in [0; 10]$.
2. $R(x) = (20 - x)(200 + 20x) = 4000 + 400x - 200x - 20x^2 = -20x^2 + 200x + 4000$.
3. $R(x) = -20(x-5)^2 + 4500$ (vérification : $-20(x^2 - 10x + 25) + 4500 = -20x^2 + 200x + 4000$). Comme $a = -20 < 0$, R est maximale en $x = 5 \in [0; 10]$, et $R(5) = 4500$. Prix : $20 - 5 = 15$ €; spectateurs : $200 + 100 = 300$; recette : $15 \times 300 = 4500$ €.
4. $R(x) \geq 4320 \iff -20x^2 + 200x - 320 \geq 0 \iff x^2 - 10x + 16 \leq 0$. $\Delta = 100 - 64 = 36$, racines $\frac{10-6}{2} = 2$ et $\frac{10+6}{2} = 8$. Entre les racines : $x \in [2; 8]$.
5. $R(x) = 4000 \iff -20x^2 + 200x = 0 \iff -20x(x-10) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 10$. La baisse non nulle $x = 10$ convient : prix 10 €, salle pleine (400 spectateurs), recette 4000 €, la même qu'au prix initial.

Conclusion : la recette maximale est de 4 500 €, pour une baisse de 5 € (place à 15 €, 300 spectateurs). Elle atteint au moins 4 320 € pour une baisse comprise entre 2 € et 8 €.

S3.

1. $\Delta_m = (-2m)^2 - 4 \times 1 \times (m+2) = 4m^2 - 4m - 8 = 4(m^2 - m - 2) = 4(m+1)(m-2)$.
2. Le signe de Δ_m est celui de $(m+1)(m-2)$, trinôme de racines -1 et 2 avec $a = 1 > 0$.
- $m < -1$ ou $m > 2$: $\Delta_m > 0$, deux solutions distinctes.
 - $m = -1$ ou $m = 2$: $\Delta_m = 0$, une solution double.
 - $-1 < m < 2$: $\Delta_m < 0$, aucune solution.

3. Pour $m = 3$: $x^2 - 6x + 5 = 0$, $\Delta = 36 - 20 = 16$, $x = \frac{6 \pm 4}{2}$: $S = \{1; 5\}$. Pour $m = -1$: $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 0$, $S = \{-1\}$.
4. Si (E_m) a deux solutions x_1 et x_2 , leur produit est $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = m + 2$. Elles sont de signes contraires si et seulement si $m + 2 < 0$, soit $m < -2$. Dans ce cas, $m < -1$ donc $\Delta_m > 0$: les deux solutions existent bien.

Conclusion : (E_m) a deux solutions de signes contraires si et seulement si $m \in]-\infty; -2[$. Exemple : $m = -3$ donne $x^2 + 6x - 1 = 0$, de racines $-3 \pm \sqrt{10}$.

S4.

1. On pose $X = x^2$ ($X \geq 0$) : $X^2 - 7X - 18 = 0$. $\Delta = 49 + 72 = 121$, $X = \frac{7 \pm 11}{2}$: $X = 9$ ou $X = -2$. La valeur -2 est négative, donc écartée. $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$. $S = \{-3; 3\}$.
2. L'équation est définie pour $x \geq 0$. Avec $X = \sqrt{x} \geq 0$ et $x = X^2$: $2X^2 - 7X + 3 = 0$. $\Delta = 49 - 24 = 25$, $X = \frac{7 \pm 5}{4}$: $X = \frac{1}{2}$ ou $X = 3$, toutes deux positives. Donc $x = \frac{1}{4}$ ou $x = 9$. $S = \left\{\frac{1}{4}; 9\right\}$.
Vérification : $2 \times 9 - 7 \times 3 + 3 = 0$ et $2 \times \frac{1}{4} - 7 \times \frac{1}{2} + 3 = 0$.
3. Avec $X = x^2 \geq 0$: $X^2 + 3X + 2 = 0$, $\Delta = 9 - 8 = 1$, $X = \frac{-3 \pm 1}{2}$: $X = -2$ ou $X = -1$, deux valeurs négatives. Aucune ne convient. (On peut aussi remarquer que $x^4 + 3x^2 + 2 \geq 2 > 0$.) $S = \emptyset$.

S5.

1. $x^2 - x - 6$ a pour discriminant $1 + 24 = 25$ et pour racines -2 et 3 : $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$. Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul (et son dénominateur non nul) : $x = -2$ ou $x = 3$, mais 3 est exclu. $S = \{-2\}$.
2. Pour $x \neq 0$: $x + 3 = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$. $\Delta = 9 + 16 = 25$, $x = \frac{-3 \pm 5}{2}$: $x = 1$ ou $x = -4$, tous deux non nuls. $S = \{-4; 1\}$.
3. Le numérateur a pour racines -2 et 3 (et $a = 1 > 0$) ; le dénominateur s'annule en -1 .

x	$-\infty$	-2	-1	3	$+\infty$	
$x^2 - x - 6$	+	0	-	-	0	+
$x + 1$	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2 - x - 6}{x + 1}$	-	0	+	-	0	+

Le quotient est positif ou nul sur $[-2; -1[$ et sur $[3; +\infty[$ (-1 est exclu). $S = [-2; -1[\cup [3; +\infty[$.

S6.

1. Le périmètre vaut $2(L + \ell) = 34$, donc $L + \ell = 17$. Par le théorème de Pythagore, $L^2 + \ell^2 = 13^2 = 169$.
Or $(L + \ell)^2 = L^2 + \ell^2 + 2L\ell$, donc $L\ell = \frac{17^2 - 169}{2} = \frac{289 - 169}{2} = 60$. Les nombres L et ℓ sont les solutions de $X^2 - 17X + 60 = 0$. $\Delta = 289 - 240 = 49$, $X = \frac{17 \pm 7}{2}$: 5 et 12 . Vérification : $5 + 12 = 17$, $5 \times 12 = 60$, $25 + 144 = 169 = 13^2$. **Conclusion :** le rectangle mesure 12 cm sur 5 cm.
2. Avec une diagonale de 11 cm, $L + \ell = 17$ et $L^2 + \ell^2 = 121$ donnent $L\ell = \frac{289 - 121}{2} = 84$. Alors L et ℓ seraient solutions de $X^2 - 17X + 84 = 0$, de discriminant $289 - 336 = -47 < 0$: pas de solution réelle. Un tel rectangle n'existe pas.
3. Avec $L + \ell = 17$ et $L^2 + \ell^2 = \delta^2$, on a $L\ell = \frac{289 - \delta^2}{2}$. Les réels L et ℓ existent, donc $X^2 - 17X + \frac{289 - \delta^2}{2} = 0$ a des solutions réelles : $\Delta = 289 - 2(289 - \delta^2) = 2\delta^2 - 289 \geq 0$, soit $\delta^2 \geq \frac{289}{2}$ et,

comme $\delta > 0$, $\delta \geq \frac{17}{\sqrt{2}}$. Égalité : $\Delta = 0$, donc $L = \ell = \frac{17}{2}$: c'est le carré de côté 8,5 cm, de diagonale $8,5\sqrt{2} = \frac{17}{\sqrt{2}}$.

S7.

1. Un point d'abscisse x est commun à $\mathcal{P}$ et d_m si $x^2 - 2x + 3 = 2x + m$, soit $x^2 - 4x + 3 - m = 0$.
2. $\Delta = 16 - 4(3 - m) = 4 + 4m = 4(m + 1)$. Si $m > -1$: deux points communs. Si $m = -1$: un seul. Si $m < -1$: aucun.
3. Pour $m = -1$: $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = 0$, donc $x = 2$, et $y = 2 \times 2 - 1 = 3$. Le point commun est $(2; 3)$ (on vérifie $2^2 - 2 \times 2 + 3 = 3$).
4. Pour $m = 0$: $x^2 - 4x + 3 = 0$, $\Delta = 4$, $x = \frac{4 \pm 2}{2}$: 1 ou 3. Avec $y = 2x$: les points sont $(1; 2)$ et $(3; 6)$.

S8.

1. h est un trinôme qui s'annule en 0 et en 40 : $h(x) = ax(x - 40)$ avec $a \neq 0$. L'axe de symétrie de la parabole passe par le milieu des racines, donc le sommet a pour abscisse 20, et sa hauteur est 16 : $h(20) = a \times 20 \times (-20) = -400a = 16$, donc $a = -0,04$.
2. $h(5) = -0,04 \times 5 \times (-35) = 7$. À 5 m d'une extrémité, l'arche mesure 7 m de haut.
3. $h(x) \geq 12 \iff -0,04x^2 + 1,6x - 12 \geq 0 \iff x^2 - 40x + 300 \leq 0$ (multiplication par -25). $\Delta = 1600 - 1200 = 400$, racines $\frac{40 - 20}{2} = 10$ et $\frac{40 + 20}{2} = 30$. L'arche dépasse 12 m exactement pour $x \in [10; 30]$. Un objet centré de largeur ℓ occupe $\left[20 - \frac{\ell}{2}; 20 + \frac{\ell}{2}\right]$; il passe si et seulement si cet intervalle est inclus dans $[10; 30]$, soit $\ell \leq 20$. Largeur maximale : 20 m. Un objet de 22 m ne passe pas.
4. Un véhicule centré de largeur 10 m occupe $[15; 25]$. Sur cet intervalle, h est croissante puis décroissante (maximum en 20), donc son minimum est atteint aux extrémités : $h(15) = -0,04 \times 15 \times (-25) = 15$ et $h(25) = -0,04 \times 25 \times (-15) = 15$. Le véhicule passe si et seulement si sa hauteur est inférieure ou égale à 15 m.

Conclusion : hauteur maximale d'un véhicule de largeur 10 m : 15 m.

S9.

1. $\Delta = 9 + 112 = 121$, racines $\frac{3 - 11}{4} = -2$ et $\frac{3 + 11}{4} = \frac{7}{2}$. Comme $a = 2 > 0$, $2x^2 - 3x - 14 \leq 0 \iff x \in \left[-2; \frac{7}{2}\right]$. Les entiers de $[-20; 20]$ dans cet intervalle sont $-2, -1, 0, 1, 2, 3$. Le script affiche 6 puis $[-2, -1, 0, 1, 2, 3]$.
2. Avec `f(n) == 0`, on garde les entiers racines de f . Les racines sont -2 et $\frac{7}{2}$, seule -2 est entière : le script affiche 1 puis $[-2]$.
3. Dans le cas $\Delta = 0$, la racine double est $-\frac{b}{2a}$: on complète par `[-b / (2*a)]`. Pour $-x^2 + 3x + 4$: `d = 25`, `x1 = (-3 - 5)/(-2) = 4.0`, `x2 = (-3 + 5)/(-2) = -1.0`. La fonction renvoie `[4.0, -1.0]` : l'ordre n'est pas croissant quand $a < 0$.
Correction : `return [min(x1, x2), max(x1, x2)]`, qui renvoie `[-1.0, 4.0]`.
4. Pour $2x^2 - 3x - 14$: `d = 121`, `x1 = (3 - 11)/4 = -2.0` et `x2 = (3 + 11)/4 = 3.5`. La boucle parcourt les éléments de la liste `[-2.0, 3.5]` et affiche `-2.0 0.0` puis `3.5 0.0` : la valeur de f en chaque racine est nulle.

S10.

1. $P(3) = 2 \times 27 - 3 \times 9 - 11 \times 3 + 6 = 54 - 27 - 33 + 6 = 0$: 3 est racine de P .
2. Pour tout réel x , $(x - 3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c$. Par identification des coefficients, on veut $a = 2$, $b - 3a = -3$, $c - 3b = -11$ et $-3c = 6$. On obtient $a = 2$, $b = -3 + 6 = 3$, $c = -2$, et la condition $c - 3b = -2 - 9 = -11$ est bien vérifiée. Donc $P(x) = (x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$.

3. $P(x) = 0 \iff x = 3$ ou $2x^2 + 3x - 2 = 0$. Pour le trinôme, $\Delta = 9 + 16 = 25$ et $x = \frac{-3 \pm 5}{4} : -2$ ou $\frac{1}{2}$. Donc $S = \left\{-2; \frac{1}{2}; 3\right\}$ et $P(x) = 2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2) = (x-3)(2x-1)(x+2)$.
4. Les facteurs s'annulent en -2 , $\frac{1}{2}$ et 3 .

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x - 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Conclusion : $P(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{2}; 3\right]$.