

Second degré**Fiche Défi**

Nom : _____

Date : _____

Exercice D1 : Démonstrations du cours**Partie A.** Au IX^e siècle, al-Khwârizmî résolvait l'équation $x^2 + 10x = 39$ en « complétant un carré ».

1. Montrer que $x^2 + 10x = 39 \iff (x + 5)^2 = 64$, puis résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

Partie B. Soient a, b, c des réels avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

2. Démontrer que, pour tout réel x , $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$.
3. En déduire, suivant le signe de Δ , l'ensemble des solutions de $ax^2 + bx + c = 0$.
4. On suppose $\Delta > 0$ et on note x_1, x_2 les solutions. Démontrer que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.
5. Réciproquement, soient u et v deux réels de somme S et de produit P . Montrer que u et v sont solutions de $X^2 - SX + P = 0$ et que ce sont les seules.

Exercice D2 : Trinôme de signe constantPour tout réel m , on considère $p_m(x) = mx^2 - 4x + m$.

1. Le polynôme p_0 est-il de signe constant sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $p_m(x) > 0$ pour tout réel x . En déduire celles pour lesquelles $p_m(x) \geq 0$ pour tout x , puis celles pour lesquelles $p_m(x) < 0$ pour tout x .
3. On suppose que l'équation $p_m(x) = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 . Préciser les valeurs possibles de m , puis étudier s'il existe m tel que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$, et s'il existe m tel que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.

Exercice D3 : Le point de la parabole le plus procheDans un repère orthonormé, soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ et $A(0; 1)$. Pour tout réel x , on note M_x le point de $\mathcal{P}$ d'abscisse x .

1. Montrer que $AM_x^2 = x^4 - x^2 + 1$.
2. En posant $X = x^2$, exprimer AM_x^2 comme un trinôme en X , avec $X \geq 0$. En déduire la plus petite valeur de AM_x et les points M_x où elle est atteinte.
3. Plus généralement, soit $B(0; b)$ avec b réel. Déterminer, suivant les valeurs de b , la distance minimale de B à un point de $\mathcal{P}$. On distinguera $b \geq \frac{1}{2}$ et $b < \frac{1}{2}$.

Exercice D4 : Une inégalité par le discriminantSoient a, b, c, d des réels. Pour tout réel t , on pose $P(t) = (at - c)^2 + (bt - d)^2$.

1. Montrer que $P(t) = (a^2 + b^2)t^2 - 2(ac + bd)t + c^2 + d^2$.
2. On suppose $(a; b) \neq (0; 0)$. Justifier que P est un trinôme et que $P(t) \geq 0$ pour tout réel t . En déduire que son discriminant est négatif ou nul, puis que $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.
3. Cette inégalité est-elle encore vraie si $a = b = 0$?
4. Application : soient x et y des réels tels que $x^2 + y^2 = 1$. Montrer que $3x + 4y \leq 5$, et trouver un couple $(x; y)$ pour lequel il y a égalité.

Exercice D5 : Une famille de parabolesPour tout réel m , on considère $f_m(x) = x^2 - 2mx + 2m$ et $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative.

1. Déterminer, suivant m , le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses.
2. Déterminer les coordonnées du sommet S_m de $\mathcal{C}_m$. Montrer que tous les sommets S_m appartiennent à une même parabole $\mathcal{Q}$, dont on donnera l'équation.
3. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par un même point que l'on déterminera.

4. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $f_m(x) = 0$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 telles que $x_1^2 + x_2^2 = 8$.

Exercice D6 : Un lancer de ballon

Un joueur lance un ballon depuis un point situé à 2 m du sol. On modélise la trajectoire dans un repère d'unité 1 m (axe des abscisses : le sol, abscisse : distance horizontale au lanceur, ordonnée : hauteur) par la courbe de $h(x) = -0,05x^2 + 0,9x + 2$, pour $x \geq 0$.

Partie A.

1. Écrire $h(x)$ sous forme canonique. En déduire la hauteur maximale du ballon et la distance horizontale correspondante.
2. Vérifier que $h(x) = -0,05(x+2)(x-20)$. À quelle distance du lanceur le ballon touche-t-il le sol ?
3. Pour quelles distances horizontales le ballon est-il à une hauteur supérieure ou égale à 4,8 m ?

Partie B. Le joueur peut modifier son tir : la trajectoire devient celle de $h_k(x) = -0,05x^2 + kx + 2$, avec $k > 0$. Un filet vertical de hauteur 4,8 m est placé à 10 m du lanceur. On veut que le ballon passe strictement au-dessus du filet et touche le sol à au plus 20 m du lanceur.

4. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles le ballon passe strictement au-dessus du filet.
5. Justifier que h_k s'annule une seule fois sur $]0; +\infty[$, en un réel x_k , et que $x_k \leq 20 \iff h_k(20) \leq 0$.
6. Conclure : déterminer l'ensemble des valeurs de k répondant aux deux contraintes. La trajectoire de la partie A convient-elle ?

Exercice D7 : Racines entières

Pour tout entier relatif m , on considère l'équation $(E_m) : x^2 - mx + m + 3 = 0$.

1. On suppose que (E_m) admet des solutions réelles x_1 et x_2 (avec $x_1 = x_2$ si la solution est double). Exprimer $x_1 + x_2$ et x_1x_2 en fonction de m , puis montrer que $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 4$.
2. On suppose de plus que x_1 et x_2 sont des entiers. Lister les couples d'entiers dont le produit vaut 4, en déduire les couples $(x_1; x_2)$ possibles avec $x_1 \leq x_2$, puis les valeurs possibles de m .
3. Vérifier, pour chaque valeur de m trouvée, que (E_m) a bien des solutions entières. Conclure.
4. On exécute le script ci-dessous.

```
from math import isqrt

resultat = []
for m in range(-50, 51):
    d = m*m - 4*(m + 3)
    if d >= 0 and isqrt(d)**2 == d:
        resultat.append(m)
print(resultat)
```

Justifier que ce script teste si les solutions de (E_m) sont des entiers, et prévoir son affichage.

Exercice D8 : Factoriser $x^n - a^n$

Soit a un réel et n un entier supérieur ou égal à 2. On admet l'égalité

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}).$$

1. Vérifier cette égalité pour $n = 2$ et pour $n = 3$ en développant le membre de droite.
2. Justifier l'égalité dans le cas général : écrire le développement de $x(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1})$ et celui de $a(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1})$, puis les soustraire en constatant que presque tous les termes se compensent.
3. Factoriser $x^3 - 8$ sous la forme d'un produit d'un facteur du premier degré et d'un trinôme sans racine réelle. En déduire les solutions réelles de $x^3 = 8$.
4. Factoriser $x^4 - 16$ en produit de facteurs de degré 1 et d'un trinôme sans racine réelle. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 = 16$.

5. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $7^n - 1$ est divisible par 6. Donner le quotient pour $n = 3$.
6. En prenant $x = 1$ et $a = q$ dans l'égalité, retrouver la formule donnant $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$ pour $q \neq 1$.