

Corrigé : Second degré**Fiche Défi****D1. Partie A.**

1. On ajoute 25 aux deux membres : $x^2 + 10x = 39 \iff x^2 + 10x + 25 = 64 \iff (x + 5)^2 = 64 \iff x + 5 = 8$ ou $x + 5 = -8$. Donc $x = 3$ ou $x = -13$: $S = \{-13; 3\}$ (al-Khwârizmî ne retenait que la solution positive 3).

Partie B.

2. Comme $a \neq 0$, on factorise : $ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$. Or $x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$, donc $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$.
3. Comme $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.
- Si $\Delta < 0$: le membre de gauche est positif ou nul et celui de droite est strictement négatif. Aucune solution : $S = \emptyset$.
 - Si $\Delta = 0$: $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}$. $S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$.
 - Si $\Delta > 0$: $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \right)^2$, donc $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ (le signe $\pm$ absorbe $|a|$ car $\pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} = \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$).
Ainsi $S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$.
4. $x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.
5. On a $(X - u)(X - v) = X^2 - (u + v)X + uv = X^2 - SX + P$. Cette expression est nulle si et seulement si $X = u$ ou $X = v$ (produit nul). Donc u et v sont solutions de $X^2 - SX + P = 0$ et il n'y en a pas d'autres.

D2.

1. $p_0(x) = -4x$ est strictement positif pour $x < 0$, nul en 0 et strictement négatif pour $x > 0$: il n'est pas de signe constant.
2. D'après 1., on suppose $m \neq 0$: p_m est un trinôme de discriminant $\Delta = 16 - 4m^2 = 4(4 - m^2)$.
- $p_m > 0$ sur $\mathbb{R}$: si $\Delta \geq 0$, p_m s'annule ou change de signe, ce qui est exclu. Si $\Delta < 0$, p_m a partout le signe de m . Il faut donc $\Delta < 0$ et $m > 0$: $m^2 > 4$ et $m > 0$, soit $m > 2$.
 - $p_m \geq 0$ sur $\mathbb{R}$: si $\Delta > 0$, p_m prend des valeurs strictement négatives entre ses racines ; si $m < 0$, p_m est négatif pour x grand. Il faut donc $m > 0$ et $\Delta \leq 0$: $m \geq 2$ (pour $m = 2$, $p_2(x) = 2(x - 1)^2 \geq 0$).
 - $p_m < 0$ sur $\mathbb{R}$: de même, il faut $m < 0$ et $\Delta < 0$, soit $m < -2$.
3. Deux solutions distinctes exigent $m \neq 0$ (pour $m = 0$ l'équation $-4x = 0$ n'a qu'une solution) et $\Delta > 0$, soit $4 - m^2 > 0$. Donc $m \in]-2; 0[\cup]0; 2[$. On a $x_1 + x_2 = \frac{4}{m}$ et $x_1 x_2 = \frac{m}{m} = 1$, donc $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{4}{m}$.
- $\frac{4}{m} = 3 \iff m = \frac{4}{3}$, et $\frac{4}{3} \in]0; 2[$: cette valeur convient (l'équation devient $x^2 - 3x + 1 = 0$, de solutions $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$).
 - $\frac{4}{m} = 1 \iff m = 4$, qui n'est pas dans $] -2; 0[\cup]0; 2[$: pour $m = 4$, $\Delta = -48 < 0$. Aucune

valeur de m ne convient.

D3.

1. $M_x(x; x^2)$ donc $AM_x^2 = (x-0)^2 + (x^2-1)^2 = x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 = x^4 - x^2 + 1$.
2. Avec $X = x^2 \geq 0$: $AM_x^2 = g(X) = X^2 - X + 1 = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, avec égalité si et seulement si $X = \frac{1}{2}$ (valeur admissible). Alors $x^2 = \frac{1}{2}$, soit $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. **Conclusion** : AM_x est minimale et vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$, aux points $M\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.
3. $BM_x^2 = x^2 + (x^2 - b)^2 = x^4 + (1 - 2b)x^2 + b^2 = X^2 + (1 - 2b)X + b^2$, avec $X = x^2 \geq 0$. Forme canonique : $\left(X - \left(b - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + b - \frac{1}{4}$.
 - Si $b \geq \frac{1}{2}$: le sommet $X = b - \frac{1}{2}$ est admissible (≥ 0). Le minimum de BM_x^2 est $b - \frac{1}{4}$, atteint pour $x = \pm \sqrt{b - \frac{1}{2}}$. Distance minimale : $\sqrt{b - \frac{1}{4}}$ (pour $b = 1$, on retrouve $\frac{\sqrt{3}}{2}$).
 - Si $b < \frac{1}{2}$: le sommet $b - \frac{1}{2}$ est négatif, donc le trinôme est croissant sur $[0; +\infty[$ et son minimum est atteint en $X = 0$: $BM^2 = b^2$. Distance minimale : $|b|$, atteinte au point $O(0; 0)$.

D4.

1. $P(t) = a^2t^2 - 2act + c^2 + b^2t^2 - 2bdt + d^2 = (a^2 + b^2)t^2 - 2(ac + bd)t + c^2 + d^2$.
2. Si $(a; b) \neq (0; 0)$, alors $a^2 + b^2 > 0$: P est un trinôme. C'est une somme de deux carrés, donc $P(t) \geq 0$ pour tout t . Si son discriminant était strictement positif, P serait strictement négatif entre ses deux racines : c'est impossible, donc $\Delta \leq 0$. Or $\Delta = 4(ac + bd)^2 - 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \leq 0$, d'où $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$.
3. Si $a = b = 0$, les deux membres valent 0 : l'inégalité est vraie (c'est une égalité).
4. On prend $a = 3, b = 4, c = x, d = y$: $(3x + 4y)^2 \leq (9 + 16)(x^2 + y^2) = 25$. Donc $|3x + 4y| \leq 5$ et en particulier $3x + 4y \leq 5$. Égalité pour $(x; y) = \left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$: $x^2 + y^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$ et $3x + 4y = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5$.

D5.

1. $\Delta = (-2m)^2 - 4 \times 2m = 4m^2 - 8m = 4m(m - 2)$. Le trinôme $m(m - 2)$ est positif strictement pour $m < 0$ ou $m > 2$, nul pour $m \in \{0; 2\}$, strictement négatif pour $0 < m < 2$. Donc : deux points d'intersection si $m < 0$ ou $m > 2$; un seul si $m = 0$ ou $m = 2$; aucun si $0 < m < 2$.
2. $\alpha = -\frac{-2m}{2} = m$ et $\beta = f_m(m) = m^2 - 2m^2 + 2m = -m^2 + 2m$. Donc $S_m(m; -m^2 + 2m)$. Les coordonnées $(x; y)$ de S_m vérifient $y = -x^2 + 2x$: tous les sommets sont sur la parabole $\mathcal{Q}$ d'équation $y = -x^2 + 2x$.
3. $f_m(x) = x^2 - 2m(x - 1)$. Pour $x = 1$: $f_m(1) = 1$ quel que soit m . Toutes les courbes passent par le point $(1; 1)$.
4. Il faut $m < 0$ ou $m > 2$ (deux solutions distinctes). Alors $x_1 + x_2 = 2m$ et $x_1x_2 = 2m$, donc $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 - 4m$. $4m^2 - 4m = 8 \iff m^2 - m - 2 = 0 \iff (m + 1)(m - 2) = 0 \iff m = -1$ ou $m = 2$. La valeur $m = 2$ est exclue ($\Delta = 0$: une seule solution, double). Pour $m = -1$ (qui vérifie $m < 0$), $x^2 + 2x - 2 = 0$ a pour solutions $-1 \pm \sqrt{3}$ et $(-1 - \sqrt{3})^2 + (-1 + \sqrt{3})^2 = (4 + 2\sqrt{3}) + (4 - 2\sqrt{3}) = 8$.

Conclusion : seule la valeur $m = -1$ convient.

D6. Partie A.

1. $h(x) = -0,05(x^2 - 18x) + 2 = -0,05[(x - 9)^2 - 81] + 2 = -0,05(x - 9)^2 + 4,05 + 2 = -0,05(x - 9)^2 + 6,05$. **Conclusion** : la hauteur maximale est 6,05 m, atteinte à 9 m du lanceur.
2. $-0,05(x + 2)(x - 20) = -0,05(x^2 - 18x - 40) = -0,05x^2 + 0,9x + 2 = h(x)$. Les racines de h sont

-2 et 20 ; seule 20 est positive. Le ballon touche le sol à 20 m du lanceur.

3. $h(x) \geq 4,8 \iff -0,05x^2 + 0,9x - 2,8 \geq 0 \iff x^2 - 18x + 56 \leq 0$ (multiplication par -20).
 $\Delta = 324 - 224 = 100$, racines $\frac{18-10}{2} = 4$ et $\frac{18+10}{2} = 14$. Le trinôme est négatif ou nul entre les racines : le ballon est à au moins $4,8$ m pour $x \in [4; 14]$ (et il reste dans le domaine $[0; 20]$).

Partie B.

4. $h_k(10) = -0,05 \times 100 + 10k + 2 = 10k - 3$. Condition : $10k - 3 > 4,8 \iff k > 0,78$.
5. On a $h_k(0) = 2 > 0$. Le produit des racines éventuelles vaut $\frac{2}{-0,05} = -40 < 0$: le discriminant $k^2 + 0,4 > 0$ garantit deux racines réelles, de signes contraires. Il y a donc une seule racine $x_k > 0$. Le trinôme a pour coefficient dominant négatif, donc $h_k > 0$ sur $[0; x_k[$ et $h_k < 0$ sur $]x_k; +\infty[$. Si $x_k \leq 20$, alors $h_k(20) \leq 0$. Si $x_k > 20$, alors $20 \in [0; x_k[$ et $h_k(20) > 0$. D'où $x_k \leq 20 \iff h_k(20) \leq 0$.
6. $h_k(20) = -20 + 20k + 2 = 20k - 18 \leq 0 \iff k \leq 0,9$. Avec $k > 0,78 : k \in]0,78; 0,9]$. Pour la partie A, $k = 0,9$: la trajectoire convient (le ballon passe à $h(10) = 6$ m $> 4,8$ m et retombe exactement à 20 m).

Conclusion : les contraintes sont satisfaites si et seulement si $0,78 < k \leq 0,9$.

D7.

1. Par les relations coefficients-racines, $x_1 + x_2 = m$ et $x_1x_2 = m + 3$. Alors $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = m + 3 - m + 1 = 4$.
2. Les couples d'entiers $(u; v)$ avec $u \leq v$ et $uv = 4$ sont $(-4; -1)$, $(-2; -2)$, $(1; 4)$ et $(2; 2)$. Avec $u = x_1 - 1$ et $v = x_2 - 1$, on obtient $(x_1; x_2) \in \{(-3; 0), (-1; -1), (2; 5), (3; 3)\}$. Comme $m = x_1 + x_2$, les valeurs possibles de m sont $-3, -2, 7$ et 6 .
3. $m = -3 : x^2 + 3x = 0$, solutions -3 et 0 . $m = -2 : x^2 + 2x + 1 = 0$, solution double -1 . $m = 7 : x^2 - 7x + 10 = 0$, solutions 2 et 5 . $m = 6 : x^2 - 6x + 9 = 0$, solution double 3 . Les quatre valeurs conviennent. **Conclusion** : (E_m) a des solutions entières si et seulement si $m \in \{-3; -2; 6; 7\}$.
4. Le discriminant de (E_m) est $d = m^2 - 4(m + 3)$. Les solutions $\frac{m \pm \sqrt{d}}{2}$ sont entières si et seulement si d est le carré d'un entier (la parité est automatique : $d \equiv m^2 \pmod{4}$, donc $\sqrt{d}$ et m ont même parité). Le test `isqrt(d)**2 == d` vérifie que d est un carré parfait. Comme $d = (m - 6)(m + 2)$, le script affiche les valeurs de m trouvées en 3., soit $[-3, -2, 6, 7]$.

D8.

1. Pour $n = 2 : (x - a)(x + a) = x^2 - a^2$. Pour $n = 3 : (x - a)(x^2 + ax + a^2) = x^3 + ax^2 + a^2x - ax^2 - a^2x - a^3 = x^3 - a^3$.
2. Notons $Q = x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1}$. Alors $xQ = x^n + ax^{n-1} + \dots + a^{n-2}x^2 + a^{n-1}x$ et $aQ = ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \dots + a^{n-1}x + a^n$. Les termes $ax^{n-1}, a^2x^{n-2}, \dots, a^{n-1}x$ figurent dans les deux développements et disparaissent dans la différence : il reste $xQ - aQ = x^n - a^n$, soit $(x - a)Q = x^n - a^n$.
3. Avec $a = 2$ et $n = 3 : x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. Le discriminant de $x^2 + 2x + 4$ vaut $4 - 16 = -12 < 0$: pas de racine réelle. Donc $x^3 = 8 \iff (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0 \iff x = 2$.
4. $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$, et $x^2 + 4 > 0$ n'a pas de racine réelle. Donc $x^4 = 16 \iff x = 2$ ou $x = -2$.
5. Avec $x = 7$ et $a = 1 : 7^n - 1 = (7 - 1)(7^{n-1} + 7^{n-2} + \dots + 7 + 1) = 6 \times (\text{entier})$, la parenthèse étant une somme d'entiers. Pour $n = 3 : 7^3 - 1 = 342 = 6 \times (49 + 7 + 1) = 6 \times 57$.
6. Avec $x = 1$ et $a = q : 1 - q^n = (1 - q)(1 + q + \dots + q^{n-1})$. Pour $q \neq 1$, on divise par $1 - q$:

$$1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Conclusion : $x^n - a^n$ est divisible par $x - a$ et le quotient est une somme de n termes.