

Corrigé : Second degré**Fiche Bases**

B1. On utilise $\Delta = b^2 - 4ac$.

- a) $a = 3, b = -7, c = 2 : \Delta = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 49 - 24 = 25 > 0$: deux racines.
- b) $a = 1, b = 6, c = 9 : \Delta = 36 - 36 = 0$: une racine double.
- c) $a = 2, b = 1, c = 3 : \Delta = 1 - 24 = -23 < 0$: aucune racine réelle.
- d) $a = -2, b = 5, c = -1 : \Delta = 25 - 4 \times (-2) \times (-1) = 25 - 8 = 17 > 0$: deux racines.
- e) $a = 5, b = 0, c = -4 : \Delta = 0 - 4 \times 5 \times (-4) = 80 > 0$: deux racines.

B2. Pour $f(x) = ax^2 + bx + c$, on pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

1. • $f : \alpha = -\frac{-12}{2 \times 3} = 2$ et $\beta = f(2) = 12 - 24 + 5 = -7$, donc $f(x) = 3(x-2)^2 - 7$.
 • $g : \alpha = -\frac{-8}{2 \times (-2)} = -2$ et $\beta = g(-2) = -8 + 16 + 1 = 9$, donc $g(x) = -2(x+2)^2 + 9$.
 • $h : \alpha = -\frac{3}{2}$ et $\beta = h\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 1 = -\frac{13}{4}$, donc $h(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$.

Vérification pour $g : -2(x+2)^2 + 9 = -2x^2 - 8x - 8 + 9 = -2x^2 - 8x + 1$.

2. Le sommet est $S(\alpha; \beta)$; c'est un minimum si $a > 0$, un maximum si $a < 0$.
 - $f : S(2; -7), a = 3 > 0$: minimum égal à -7 , atteint en $x = 2$.
 - $g : S(-2; 9), a = -2 < 0$: maximum égal à 9 , atteint en $x = -2$.
 - $h : S\left(-\frac{3}{2}; -\frac{13}{4}\right), a = 1 > 0$: minimum égal à $-\frac{13}{4}$, atteint en $x = -\frac{3}{2}$.
3. La courbe de $x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ est l'image de celle de $x \mapsto ax^2$ par la translation de vecteur $\vec{w}(\alpha; \beta)$: $\vec{w}(2; -7)$ pour f (à partir de $y = 3x^2$), $\vec{w}(-2; 9)$ pour g (à partir de $y = -2x^2$), $\vec{w}\left(-\frac{3}{2}; -\frac{13}{4}\right)$ pour h (à partir de $y = x^2$).

B3.

1. Sommet $S(1; 4)$, axe de symétrie : la droite d'équation $x = 1$, racines : -1 et 3 (points d'ordonnée nulle).
2. $a < 0$: la parabole est tournée vers le bas, son sommet est le point le plus haut (maximum).
3. $f(x) > 0$ lorsque $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de l'axe des abscisses : $S =]-1; 3[$. Les points d'ordonnée 3 ont pour abscisses 0 et 2 ; $\mathcal{C}$ est en dessous de la droite $y = 3$ (ou sur elle) à l'extérieur de ces abscisses : $f(x) \leq 3$ pour $x \in]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[$.
4. $k = 4$: une solution ($x = 1$, le sommet). $k = 5$: aucune solution, car le maximum de f est 4 . $k = 1$: deux solutions, car la droite $y = 1$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points.
5. Les racines sont -1 et 3 , donc $f(x) = a(x+1)(x-3)$. Or $f(0) = 3$ donne $a \times 1 \times (-3) = 3$, soit $a = -1$. Ainsi $f(x) = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$. Vérification : $f(1) = -1 + 2 + 3 = 4$, ce qui est bien l'ordonnée du sommet.

Conclusion : $f(x) = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$.

B4.

1. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$. Les solutions sont $x_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3+5}{4} = 2$.
 $S = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$.
2. L'équation équivaut à $9x^2 - 6x + 1 = 0$. $\Delta = 36 - 36 = 0$: solution double $x_0 = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$. $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$.
3. $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$. $S = \emptyset$.
4. L'équation équivaut à $x^2 - 2x - 1 = 0$. $\Delta = 4 + 4 = 8 > 0$ et $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, donc $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$.
 $S = \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$.

5. $5 - 7 + 2 = 0$: 1 est racine évidente. Le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = \frac{2}{5}$, donc l'autre racine est $\frac{2}{5}$.
 $S = \left\{ \frac{2}{5}; 1 \right\}$. Vérification : $\Delta = 49 - 40 = 9$ et $\frac{7 \pm 3}{10}$ donne bien $\frac{2}{5}$ et 1.

B5.

1. $\Delta = 1 + 24 = 25$, racines $\frac{1-5}{2} = -2$ et $\frac{1+5}{2} = 3$. Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est négatif ou nul entre les racines. $S = [-2; 3]$.
2. $\Delta = 1 + 8 = 9$, racines $\frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{1+3}{4} = 1$. Comme $a = 2 > 0$, le trinôme est strictement positif à l'extérieur des racines. $S = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup] 1; +\infty[$.
3. $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ et $a = -3 < 0$: le trinôme est du signe de a pour tout réel x , donc strictement négatif. $S = \mathbb{R}$.
4. Les facteurs s'annulent en $-\frac{1}{2}$ et en 4.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$2x + 1$	—	0	+	+
$4 - x$	+	+	0	—
$(2x + 1)(4 - x)$	—	0	+	—

$$S = \left[-\frac{1}{2}; 4 \right].$$

B6.

1. $\Delta = 81 - 56 = 25$, racines $\frac{9-5}{2} = 2$ et $\frac{9+5}{2} = 7$: $x^2 - 9x + 14 = (x-2)(x-7)$.
2. $3 - 1 - 2 = 0$ (c'est $a - b + c$) : -1 est racine. L'autre racine vaut $-\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. Donc $3x^2 + x - 2 = 3(x+1)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x+1)(3x-2)$.
3. $\Delta = 400 - 400 = 0$, racine double $x_0 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$: $4x^2 - 20x + 25 = 4\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = (2x-5)^2$.
4. $\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$: ce trinôme n'a pas de racine réelle, il ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.
5. Le facteur x est commun : $5x^2 - 7x = x(5x-7)$ (racines 0 et $\frac{7}{5}$).
6. $3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x-4)(x+4)$ (identité remarquable $a^2 - b^2$).

B7.

1. $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 81 - 32 = 49 > 0$: deux solutions distinctes.
2. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{9}{2}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 2$. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{81}{4} - 4 = \frac{65}{4}$. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{9/2}{2} = \frac{9}{4}$.
3. $x = \frac{9 \pm 7}{4}$: $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = 4$. On a bien $\frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$, $\frac{1}{2} \times 4 = 2$, $\frac{1}{4} + 16 = \frac{65}{4}$ et $2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$.
4. Ces nombres sont les solutions de $X^2 - SX + P = 0$ avec $S = -1$ et $P = -12$, soit $X^2 + X - 12 = 0$.
 $\Delta = 1 + 48 = 49$, donc $X = \frac{-1 \pm 7}{2}$: 3 et -4 . Vérification : $3 + (-4) = -1$ et $3 \times (-4) = -12$.

Conclusion : les deux nombres sont -4 et 3.

B8.

1. **Vrai.** Si $ac < 0$, alors $-4ac > 0$ donc $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

2. **Vrai.** $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ et $a = -1 < 0$: le trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$, donc strictement négatif.
3. **Vrai.** L'axe de symétrie est $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{4} = 2$.
4. **Faux.** La somme des racines vaut $-\frac{b}{a}$. Contre-exemple : $x^2 - 5x + 6$ a pour racines 2 et 3, de somme 5, alors que $\frac{b}{a} = -5$.
5. **Vrai.** $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$.
6. La négation de « pour tout réel x , $-x^2 + 4x - 5 < 0$ » est « il existe au moins un réel x tel que $-x^2 + 4x - 5 \geq 0$ ». Cette négation est **fausse**, puisque l'affirmation 2 est vraie.

B9.

1. `nb_racines(1, -4, 4)` : $\Delta = 16 - 16 = 0$, renvoie 1. `nb_racines(2, 1, 3)` : $\Delta = 1 - 24 = -23 < 0$, renvoie 0. `nb_racines(3, -7, 2)` : $\Delta = 49 - 24 = 25 > 0$, renvoie 2.
2. La somme des racines est $-\frac{b}{a}$: on complète par `-b/a`. Pour `somme_racines(2, -9, 4)`, on obtient $-\frac{-9}{2} = 4,5$ (valeur renvoyée : 4.5), ce qui est cohérent avec B7.
3. $\Delta = 2^2 - 0 = 4 > 0$: la fonction renvoie 2. Or l'équation $2x + 1 = 0$ n'a qu'une solution, $-\frac{1}{2}$: le résultat est faux. Le programme suppose $a \neq 0$; avec $a = 0$, ce n'est plus un trinôme du second degré.