

## Fiche 3 : problèmes et paramètres

---

Dix exercices de modélisation, les grands classiques du second degré :

- aire maximale d'un rectangle de périmètre fixé ;
- la trajectoire d'un ballon : hauteur maximale, durée en l'air ;
- un bénéfice : maximum et intervalle de rentabilité ;
- une droite tangente à une parabole (anticipation du chapitre 3) ;
- une fonction de signe constant selon un paramètre ;
- un script Python ;
- vrai/faux ;
- une méthode géométrique d'Al-Khwârizmî transformée en algorithme ;
- choisir la forme adaptée (développée, canonique, factorisée) ;
- la variance, minimum d'une fonction du second degré.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- l'**inconnue est définie** avec son intervalle ;
- le problème est traduit par une **fonction** ;
- l'étude utilise le **sommet** et les **racines** ;
- la conclusion est **en contexte, avec l'unité**.

### Comment attaquer un problème concret

1. **Défins l'inconnue  $x$**  et précise son **intervalle** (une longueur est positive).
2. **Traduis** la grandeur étudiée par une fonction  $f(x)$  du second degré.
3. **Étudie-la** : sommet pour un extremum, racines et signe pour un intervalle.
4. **Conclus** avec une phrase, en contexte, avec l'unité.

### Les pièges classiques

- Oublier de préciser l'**intervalle** de l'inconnue.
- Donner le sommet comme **solution** sans vérifier qu'il est dans l'intervalle.
- Oublier l'**unité** dans la conclusion.
- Répondre par la valeur de  $x$  quand on demande la valeur **du maximum** (ou l'inverse).

Un maximum trouvé pour  $x = -3$  mètres, c'est un enclos qui existe dans un autre univers. Vérifie toujours que ta solution a un sens.

**Exercice 1 (★★) : l'aire maximale**

Un rectangle a pour périmètre 20 m. On note  $x$  l'une de ses dimensions, en mètres.

1. Exprimer l'aire  $A(x)$  en fonction de  $x$  et préciser l'intervalle de  $x$ .
2. Pour quelle valeur de  $x$  l'aire est-elle maximale ? Quelle est cette aire ? Quelle est la forme du rectangle ?

**Correction de l'exercice 1**

## Question 1

Le demi-périmètre est 10 : l'autre dimension vaut  $10 - x$ . Les dimensions sont positives :  $x \in ]0; 10[$ .

$$A(x) = x(10 - x)$$

$$A(x) = -x^2 + 10x, \text{ pour } x \in ]0; 10[$$

## Question 2

On complète le carré :  $A(x) = -(x^2 - 10x) = -[(x - 5)^2 - 25] = -(x - 5)^2 + 25$ .

Le carré  $(x - 5)^2$  est positif ou nul et précédé du signe  $-$  :  $A(x) \leq 25$ , avec égalité si et seulement si  $x = 5$ . Comme  $5 \in ]0; 10[$ , ce maximum est atteint dans l'intervalle.

$$A(5) = -25 + 50 = 25$$

**L'aire maximale est 25 m<sup>2</sup>, atteinte pour  $x = 5$ .**

Les dimensions sont 5 m sur  $10 - 5 = 5$  m : **c'est un carré.**

**Exercice 2 (★★) : la trajectoire d'un ballon**

La hauteur d'un ballon, en mètres, à l'instant  $t$  (en secondes) est  $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$  pour  $t \geq 0$ .

1. Déterminer la hauteur maximale et l'instant où elle est atteinte.
2. Au bout de combien de temps le ballon touche-t-il le sol ?
3. Pendant combien de temps le ballon est-il à plus de 16 m de hauteur ?

**Correction de l'exercice 2**

## Question 1

On complète le carré :  $h(t) = -5(t^2 - 4t) + 1 = -5[(t - 2)^2 - 4] + 1 = -5(t - 2)^2 + 21$ .

Comme  $a = -5 < 0$ ,  $h$  admet un maximum en  $t = 2$ .

$$h(2) = -20 + 40 + 1 = 21$$

La hauteur maximale est 21 m, atteinte à  $t = 2$  s.

Question 2

On résout  $h(t) = 0$ , c'est-à-dire  $5t^2 - 20t - 1 = 0$ .  $\Delta = 400 + 20 = 420 > 0$ . Les solutions sont  $t = \frac{20 \pm \sqrt{420}}{10} = 2 \pm \frac{\sqrt{420}}{10}$ . Seule la solution positive convient :

$$t = 2 + \frac{\sqrt{420}}{10} \approx 4,05$$

Le ballon touche le sol au bout d'environ 4,05 s.

Question 3

$h(t) \geq 16 \iff -5t^2 + 20t - 15 \geq 0 \iff t^2 - 4t + 3 \leq 0$ .  $\Delta = 16 - 12 = 4$ , donc les racines sont  $\frac{4-2}{2} = 1$  et  $\frac{4+2}{2} = 3$ . Comme  $a = 1 > 0$ , la fonction est négative entre les racines :  $t \in [1; 3]$ .

Le ballon est à plus de 16 m pendant  $3 - 1 = 2$  secondes.

### Exercice 3 (★★) : le bénéfice

Une entreprise fabrique  $x$  centaines d'objets ( $x \in [0; 60]$ ). Son bénéfice, en euros, est  $B(x) = -2x^2 + 120x - 1\,000$ .

1. Pour quelles quantités l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice strictement positif ?
2. Quel est le bénéfice maximal, et pour quelle production ?

#### Correction de l'exercice 3

Question 1

$B(x) > 0 \iff -2x^2 + 120x - 1\,000 > 0 \iff x^2 - 60x + 500 < 0$ .  $\Delta = 3\,600 - 2\,000 = 1\,600 > 0$ , donc les racines sont  $\frac{60-40}{2} = 10$  et  $\frac{60+40}{2} = 50$ . Comme  $a = 1 > 0$ , la fonction est négative entre les racines.

Le bénéfice est strictement positif pour  $x \in ]10; 50[$ , c'est-à-dire pour une production comprise entre 1 000 et 5 000 objets.

Question 2

On complète le carré :  $B(x) = -2(x^2 - 60x) - 1\,000 = -2[(x - 30)^2 - 900] - 1\,000 = -2(x - 30)^2 + 800$ . Comme  $a = -2 < 0$ ,  $B$  admet un maximum en  $x = 30$ , et  $30 \in [0; 60]$  :

$$B(30) = -1\,800 + 3\,600 - 1\,000 = 800$$

Le bénéfice maximal est de 800 €, pour une production de 3 000 objets.

### Exercice 4 (★★★) : une droite tangente à une parabole

Soit  $\mathcal{P}$  la parabole d'équation  $y = x^2 - 4x + 3$  et  $d$  la droite d'équation  $y = 2x - 6$ . (La notion de tangente sera définie au chapitre 3 : cet exercice l'anticipe.)

1. Résoudre  $x^2 - 4x + 3 = 2x - 6$ . Interpréter.
2. Quelle est la position de  $\mathcal{P}$  par rapport à  $d$  ?

#### Correction de l'exercice 4

Question 1

$$x^2 - 4x + 3 = 2x - 6 \iff x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x - 3)^2 = 0 \iff x = 3.$$

La parabole et la droite ont **un seul point commun**, d'abscisse 3 :  $y = 9 - 12 + 3 = 0$ , soit le point  $(3; 0)$ .

**La droite  $d$  est tangente à la parabole  $\mathcal{P}$  au point  $(3; 0)$ .**

Question 2

$$x^2 - 4x + 3 - (2x - 6) = (x - 3)^2 \geq 0 \text{ pour tout } x.$$

**La parabole est au-dessus de la droite  $d$ , avec un unique point de contact.**

### Exercice 5 (★★★) : une fonction de signe constant

Déterminer les valeurs du réel  $m$  pour lesquelles  $x^2 + mx + 1 > 0$  pour tout réel  $x$ .

#### Correction de l'exercice 5

La fonction  $x \mapsto x^2 + mx + 1$  a pour coefficient dominant  $a = 1 > 0$ . Il est strictement positif pour tout réel  $x$  si et seulement s'il n'a **aucune racine réelle**, c'est-à-dire si  $\Delta < 0$ .

$$\Delta = m^2 - 4 < 0 \iff (m - 2)(m + 2) < 0 \iff -2 < m < 2$$

**$x^2 + mx + 1 > 0$  pour tout réel  $x$  si et seulement si  $m \in ]-2; 2[$ .**

*Contrôle* : pour  $m = 0$ ,  $x^2 + 1 > 0$  ; pour  $m = 3$ ,  $x^2 + 3x + 1$  s'annule (par exemple  $\Delta = 5 > 0$ ).

## Exercice 6 (★★) : Python

On considère :

```
def nb_solutions(a, b, c):
    delta = b*b - 4*a*c
    if delta > 0:
        return 2
    if delta == 0:
        return 1
    return 0
```

1. Que renvoient `nb_solutions(1, -6, 9)` et `nb_solutions(1, 1, 1)` ?
2. Écrire une boucle qui affiche, pour  $m$  entier de  $-5$  à  $5$ , le nombre de solutions de  $x^2 - mx + 4 = 0$ . Pour quelles valeurs de  $m$  obtient-on 1 ?

### Correction de l'exercice 6

Question 1

`nb_solutions(1, -6, 9)` :  $\Delta = 36 - 36 = 0$ , renvoie 1.

`nb_solutions(1, 1, 1)` :  $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ , renvoie 0.

Question 2

```
for m in range(-5, 6):
    print(m, nb_solutions(1, -m, 4))
```

Le script affiche 1 pour  $m = -4$  et pour  $m = 4$  (où  $\Delta = m^2 - 16 = 0$ ), 2 pour  $m = \pm 5$ , et 0 pour  $-3 \leq m \leq 3$ . Cela confirme l'exercice 4 de la fiche 2.

## Exercice 7 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Parmi tous les rectangles de périmètre donné, le carré a l'aire maximale.
2. Si le sommet d'une parabole est hors de l'intervalle d'étude, il donne quand même le maximum sur cet intervalle.
3. Une droite et une parabole ont toujours deux points communs.

### Correction de l'exercice 7

## Affirmation 1

C'est le résultat de l'exercice 1 : le maximum de  $x(10 - x)$  est atteint pour  $x = 5$ .

**Vrai.**

## Affirmation 2

Si le sommet n'est pas dans l'intervalle, le maximum sur l'intervalle est atteint **à une borne** : il faut comparer les valeurs aux bornes.

**Faux.**

## Affirmation 3

Une droite et une parabole peuvent avoir deux, un (tangente) ou aucun point commun (exercice 4).

**Faux.**

## Exercice 8 (★★★) : d'Al-Khwârizmî à Python

Dans cet exercice, on reprend la méthode géométrique de la partie 12 du cours pour résoudre  $x^2 + px = q$  avec  $p > 0$  et  $q > 0$ .

1. Résoudre  $x^2 + 10x = 24$  en complétant le carré (on cherche un nombre positif).
2. Écrire en Python une fonction `solution_positive(p, q)` qui renvoie cette solution positive. Que renvoie `solution_positive(10, 24)` ? Et la liste `[solution_positive(10, q) for q in [11, 24, 39]]` ?
3. Vérifier le résultat de la question 1 avec le discriminant. Pourquoi la méthode géométrique ne donne-t-elle pas la deuxième solution ?

### Correction de l'exercice 8

## Question 1

$x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$ , donc  $x^2 + 10x = 24 \iff (x + 5)^2 = 49$ . Le nombre  $x + 5$  est positif et son carré vaut 49 :  $x + 5 = 7$ .

$$x = 2$$

## Question 2

```
from math import sqrt

def solution_positive(p, q):
    grand_carre = q + (p/2)**2      # aire du grand carré
    return sqrt(grand_carre) - p/2 # côté du grand carré, moins p/2
```

Pour  $p = 10$  et  $q = 24$  :  $\text{grand\_carre}$  vaut  $24 + 25 = 49$ , sa racine carrée 7, et on retranche 5.

$\text{solution\_positive}(10, 24)$  renvoie 2.0.

Pour  $q = 11, 39$  :  $\sqrt{36} - 5 = 1$  et  $\sqrt{64} - 5 = 3$ .

La liste vaut  $[1.0, 2.0, 3.0]$ .

Question 3

$$x^2 + 10x - 24 = 0 : \Delta = 100 + 96 = 196 = 14^2 > 0, \text{ donc } x = \frac{-10 - 14}{2} = -12 \text{ ou } x = \frac{-10 + 14}{2} = 2.$$

La solution positive est bien 2. L'autre solution,  $-12$ , est négative : dans une méthode qui additionne des aires de carrés et de rectangles, et dans un monde sans nombres négatifs, elle n'apparaît pas.

## Exercice 9 (★★) : choisir la forme adaptée

On considère  $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$ .

- Vérifier que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = 3(x - 1)^2 - 12 = 3(x + 1)(x - 3)$ .
- Pour chacune des questions suivantes, choisir la forme la plus adaptée (développée, canonique ou factorisée) et répondre : **a.** calculer  $f(0)$  ; **b.** résoudre  $f(x) = 0$  ; **c.** trouver le minimum de  $f$  ; **d.** résoudre  $f(x) = -9$  ; **e.** étudier le signe de  $f(x)$  ; **f.** résoudre  $f(x) = -12$ .

### Correction de l'exercice 9

Question 1

$$3(x - 1)^2 - 12 = 3x^2 - 6x + 3 - 12 = 3x^2 - 6x - 9 \text{ et } 3(x + 1)(x - 3) = 3(x^2 - 2x - 3) = 3x^2 - 6x - 9.$$

Question 2

**a.** Forme développée :  $f(0) = -9$ .

**b.** Forme factorisée :  $3(x + 1)(x - 3) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 3$ .  $S = \{-1; 3\}$ .

**c.** Forme canonique :  $(x - 1)^2 \geq 0$ , donc  $f(x) \geq -12$  avec égalité pour  $x = 1$ . Le minimum est  $-12$ , atteint en  $x = 1$ .

- d. Forme développée :  $f(x) = -9 \iff 3x^2 - 6x = 0 \iff 3x(x - 2) = 0$ .  $S = \{0; 2\}$ .
- e. Forme factorisée : racines  $-1 < 3$  et  $a = 3 > 0$  :  $f(x) > 0$  sur  $] -\infty; -1[ \cup ]3; +\infty[$  et  $f(x) < 0$  sur  $] -1; 3[$ .
- f. Forme canonique :  $3(x - 1)^2 - 12 = -12 \iff (x - 1)^2 = 0$ .  $S = \{1\}$ .

### Exercice 10 (★★★) : la variance, minimum d'une fonction du second degré

On considère la série 2 ; 4 ; 4 ; 6 ; 9, de moyenne  $\bar{x}$  et de variance  $V = \frac{1}{5} \sum (x_i - \bar{x})^2$ . Pour tout réel  $t$ , on pose  $g(t) = \frac{1}{5} \sum (x_i - t)^2$ .

1. Calculer  $\bar{x}$  et  $V$ .
2. Montrer que  $g(t) = t^2 - 10t + \frac{153}{5}$ .
3. Mettre  $g(t)$  sous forme canonique. En déduire le minimum de  $g$  et la valeur de  $t$  où il est atteint. Que remarque-t-on ?

#### Correction de l'exercice 10

Question 1

$$\bar{x} = \frac{2 + 4 + 4 + 6 + 9}{5} = \frac{25}{5} = 5. \text{ Les écarts à la moyenne sont } -3, -1, -1, 1, 4, \text{ d'où } V = \frac{9 + 1 + 1 + 1 + 16}{5} = \frac{28}{5} = 5,6.$$

$$\bar{x} = 5 \text{ et } V = \frac{28}{5}$$

Question 2

En développant chaque carré :  $g(t) =$

$$\frac{1}{5} [5t^2 - 2t(2 + 4 + 4 + 6 + 9) + (4 + 16 + 16 + 36 + 81)] = \frac{1}{5} [5t^2 - 50t + 153].$$

$$g(t) = t^2 - 10t + \frac{153}{5}$$

Question 3

$$g(t) = (t - 5)^2 - 25 + \frac{153}{5} = (t - 5)^2 + \frac{153 - 125}{5} = (t - 5)^2 + \frac{28}{5}.$$

Le minimum de  $g$  est  $\frac{28}{5}$ , atteint en  $t = 5$  : c'est la moyenne  $\bar{x}$ , et le minimum est la variance  $V$ .

**Ce qui peut tomber en contrôle**

- Un **problème d'optimisation** avec le sommet et l'intervalle (exercices 1 à 3).
- Une **position relative** droite-parabole (exercice 4).
- Un **paramètre** avec le discriminant (exercice 5).
- Un **script Python** sur le nombre de solutions (exercice 6).
- Le **choix de la forme adaptée** (exercice 9).
- Le lien avec la **variance** et la méthode géométrique en algorithme (exercices 8 et 10).

**QCM : une seule bonne réponse par question**

1. Parmi les rectangles de périmètre 20 m, quelle est l'aire maximale ?

- A. 20 m<sup>2</sup>
- B. 50 m<sup>2</sup>
- C. 100 m<sup>2</sup>
- D. 25 m<sup>2</sup> (bonne réponse)

*Justification :*  $A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$  est maximale en  $x = 5$  :  $A(5) = 25$ . Le rectangle est un carré.

2. La hauteur d'un ballon est  $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$  (en mètres,  $t$  en secondes). Quelle est sa hauteur maximale ?

- A. 1 m
- B. 21 m (bonne réponse)
- C. 25 m
- D. 20 m

*Justification :*  $h(t) = -5(t - 2)^2 + 21$  : le maximum est atteint en  $t = 2$  et vaut  $h(2) = 21$ .

3. Pour quelles valeurs de  $m$  a-t-on  $x^2 + mx + 1 > 0$  pour tout réel  $x$  ?

- A.  $m \neq 0$
- B.  $-2 < m < 2$  (bonne réponse)
- C.  $m < -2$
- D.  $m > 2$

*Justification :* Comme  $a = 1 > 0$ , il faut  $\Delta = m^2 - 4 < 0$ , soit  $-2 < m < 2$ .

4. La parabole  $y = x^2 - 4x + 3$  et la droite  $y = 2x - 6$  ont :

- A. aucun point commun
- B. un unique point commun (la droite est tangente) (bonne réponse)
- C. deux points communs

D. une infinité de points communs

*Justification* :  $x^2 - 4x + 3 = 2x - 6 \iff x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0$  : une seule solution,  $x = 3$ .

5. Si le sommet d'une parabole est hors de l'intervalle d'étude, le maximum sur cet intervalle est atteint :

A. à l'une des bornes de l'intervalle (bonne réponse)

B. nulle part

C. toujours en  $x = 0$

D. au sommet quand même

*Justification* : Sur l'intervalle, la fonction est monotone : son maximum est atteint à une borne. On compare les valeurs aux bornes.