

Fiche 2 : équations et inéquations du second degré

Dix exercices pour maîtriser les équations et les inéquations du second degré :

- résolution d'équations avec le discriminant ;
- inéquations et tableau de signes ;
- équations qui se ramènent au second degré (développer, réduire, problème géométrique) ;
- discussion selon un paramètre ;
- somme et produit des racines ;
- deux nombres de somme et de produit donnés (approfondissement) ;
- un script Python ;
- vrai/faux ;
- racine évidente (et factorisation d'un polynôme du troisième degré, en approfondissement) ;
- logique : réciproque, contraposée, négation, condition nécessaire et suffisante.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- Δ calculé et son signe donné avant les racines ;
- solutions vérifiées ;
- inéquations résolues avec le **signe de a** et les racines ;
- conclusion sous forme d'**ensemble solution S** .

Le modèle de rédaction d'une inéquation

« On étudie le signe de $-2x^2 + x + 3$. $\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$: deux racines $x_1 = \frac{-1-5}{-4} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+5}{-4} = -1$. Comme $a = -2 < 0$, la fonction est **positive entre les racines**. Donc $-2x^2 + x + 3 > 0 \iff x \in \left] -1 ; \frac{3}{2} \right[$. $S = \left] -1 ; \frac{3}{2} \right[$. »

- **Racines, puis signe de a** , puis lecture du signe.
- Attention aux **crochets** : inégalité **stricte** ou large.
- Termine par $S = \dots$

Les pièges classiques

- Oublier de **calculer** Δ avant les racines.
- **Se tromper d'intervalle** : à l'extérieur des racines pour $a > 0$ et « ≥ 0 », entre les racines pour $a > 0$ et « ≤ 0 ».
- Garder une solution qui **n'a pas de sens** dans le problème (une longueur négative, par exemple).
- Lire le signe sans **ranger les racines dans l'ordre croissant** (si $a < 0$, la formule donne $x_1 > x_2$).

Une inéquation résolue comme une équation, c'est un parapluie ouvert au soleil : ça ne sert à rien mais ça se voit.

Exercice 1 (★) : résoudre des équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $2x^2 - 5x + 2 = 0$

2. $x^2 + 2x + 5 = 0$

3. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

4. $-x^2 + 4x + 5 = 0$

Correction de l'exercice 1

Équation 1

$$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0. \text{ Deux solutions : } x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{5+3}{4} = 2.$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}; 2 \right\}$$

Équation 2

$$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0.$$

$$S = \emptyset$$

Équation 3

$$\Delta = 144 - 144 = 0. \text{ Solution double : } x_0 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Équation 4

$$\Delta = 16 + 20 = 36 > 0. \text{ Deux solutions : } x_1 = \frac{-4-6}{-2} = 5 \text{ et } x_2 = \frac{-4+6}{-2} = -1.$$

$$S = \{-1; 5\}$$

Exercice 2 (★★) : inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $x^2 - 3x - 4 \leq 0$

2. $-2x^2 + x + 3 > 0$

3. $x^2 + 2x + 5 > 0$

4. $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$

Correction de l'exercice 2

Inéquation 1

$\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$. Racines : $x_1 = \frac{3-5}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$. Comme $a = 1 > 0$, la fonction est négative ou nulle **entre les racines**.

$$S = [-1; 4]$$

Inéquation 2

$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0$. Racines -1 et $\frac{3}{2}$. Comme $a = -2 < 0$, la fonction est **positive entre les racines**.

$$S = \left] -1; \frac{3}{2} \right[$$

Inéquation 3

$\Delta = -16 < 0$ et $a = 1 > 0$: la fonction est du signe de a pour tout réel x , donc strictement positive.

$$S = \mathbb{R}$$

Inéquation 4

Racines $\frac{1}{2}$ et 2 (exercice 1). Comme $a = 2 > 0$, la fonction est positive ou nulle **à l'extérieur des racines**.

$$S = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right] \cup [2; +\infty[$$

Exercice 3 (★★) : se ramener au second degréRésoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $(x - 2)^2 = 3x - 2$

2. $(2x - 1)(x + 3) = x^2 + 7$

3. Un rectangle a un côté de 3 m de plus que l'autre et une diagonale de 15 m. Quelles sont ses dimensions ?

Correction de l'exercice 3

Équation 1

On développe et on passe tout dans un membre : $x^2 - 4x + 4 = 3x - 2 \iff x^2 - 7x + 6 = 0$. $\Delta = 49 - 24 = 25 > 0$, donc $x_1 = \frac{7-5}{2} = 1$ et $x_2 = \frac{7+5}{2} = 6$. (On retrouve aussi la factorisation directe : somme 7, produit 6.)Vérification : pour $x = 6$, $(6 - 2)^2 = 16$ et $3 \times 6 - 2 = 16$

$S = \{1; 6\}$

Équation 2

 $(2x - 1)(x + 3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$. L'équation devient $2x^2 + 5x - 3 = x^2 + 7 \iff x^2 + 5x - 10 = 0$. $\Delta = 25 + 40 = 65 > 0$, donc $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{65}}{2}$ et $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{65}}{2}$.

$$S = \left\{ \frac{-5 - \sqrt{65}}{2}; \frac{-5 + \sqrt{65}}{2} \right\}$$

Problème 3

On note x le plus petit côté, en m, avec $x > 0$. Le théorème de Pythagore donne $x^2 + (x + 3)^2 = 15^2$, soit $2x^2 + 6x + 9 = 225 \iff x^2 + 3x - 108 = 0$. $\Delta = 9 + 432 = 441 = 21^2 > 0$, donc $x_1 = \frac{-3 - 21}{2} = -12$ et $x_2 = \frac{-3 + 21}{2} = 9$. Comme $x > 0$, seule $x = 9$ convient.

Le rectangle mesure 9 m sur 12 m.

Vérification : $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$

Exercice 4 (★★★) : discuter selon un paramètre

1. Selon les valeurs du réel m , donner le nombre de solutions de $x^2 - mx + 4 = 0$.
2. Déterminer m pour que $x^2 + mx + m + 3 = 0$ admette une racine double, et donner cette racine.

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$\Delta = m^2 - 16 = (m - 4)(m + 4).$$

- $\Delta > 0 \iff m < -4$ ou $m > 4$: **deux solutions.**
- $\Delta = 0 \iff m = -4$ ou $m = 4$: **une solution.**
- $\Delta < 0 \iff -4 < m < 4$: **aucune solution.**

Question 2

$$\Delta = m^2 - 4(m + 3) = m^2 - 4m - 12 = (m - 6)(m + 2). \text{ Racine double } \iff \Delta = 0 \iff m = 6 \text{ ou } m = -2.$$

Pour $m = 6$: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, racine double -3 .

Pour $m = -2$: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, racine double 1 .

$m = 6$ (racine -3) ou $m = -2$ (racine 1).

Exercice 5 (★★) : somme et produit des racines

Partie A. Soit x_1 et x_2 les solutions de $x^2 - 3x - 1 = 0$.

1. Justifier que l'équation a deux solutions, puis calculer $x_1 + x_2$ et x_1x_2 .
2. Calculer x_1x_2 , puis dire sans calculer Δ si les deux solutions ont le même signe.

Partie B. L'équation $2x^2 - 5x + m = 0$ admet 2 pour racine.

3. Déterminer m , puis l'autre racine **sans calculer Δ .**

Correction de l'exercice 5

Question 1

$\Delta = 9 + 4 = 13 > 0$: deux solutions distinctes. D'après les relations entre coefficients et racines :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 3 \text{ et } x_1x_2 = \frac{c}{a} = -1$$

Question 2

$x_1 x_2 = -1 < 0$: le produit est négatif, donc les deux solutions sont de **signes contraires**.

Une solution est positive et l'autre négative.

Question 3

$2 \times 4 - 10 + m = 0$, donc $m = 2$. Le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = \frac{m}{2} = 1$: l'autre racine est $\frac{1}{2}$.

$m = 2$ et l'autre racine est $\frac{1}{2}$.

Vérification avec la somme : $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = -\frac{b}{a}$

Exercice 6 (★★) : deux nombres (approfondissement du programme)

1. Trouver deux nombres dont la somme est 7 et le produit est 10.
2. Un rectangle a pour périmètre 20 et pour aire 21. Quelles sont ses dimensions ?

Correction de l'exercice 6

Question 1

Deux nombres de somme $S = 7$ et de produit $P = 10$ sont les solutions de $X^2 - 7X + 10 = 0$.
 $\Delta = 49 - 40 = 9$, donc $X_1 = \frac{7-3}{2} = 2$ et $X_2 = \frac{7+3}{2} = 5$.

Les nombres sont 2 et 5.

Question 2

Le demi-périmètre est 10 : la somme des dimensions est 10, leur produit est 21. Ce sont les solutions de $X^2 - 10X + 21 = 0$. $\Delta = 100 - 84 = 16$, donc $X_1 = \frac{10-4}{2} = 3$ et $X_2 = \frac{10+4}{2} = 7$.

Le rectangle mesure 3 sur 7.

Exercice 7 (★★) : Python

On considère :

```
from math import sqrt

def racines(a, b, c):
    delta = b*b - 4*a*c
    if delta > 0:
        return [(-b - sqrt(delta))/(2*a), (-b + sqrt(delta))/(2*a)]
    if delta == 0:
        return [-b/(2*a)]
    return []
```

1. Que renvoient `racines(2, -5, 2)`, `racines(4, -12, 9)` et `racines(1, 2, 5)` ?
2. Que fait la fonction lorsque `delta < 0` ?
3. Écrire une liste en compréhension qui contient les entiers de $[-5; 5]$ solutions de $x^2 - x - 2 \leq 0$.

Correction de l'exercice 7

Question 1

`racines(2, -5, 2)` : $\Delta = 9 > 0$: renvoie `[0.5, 2.0]`.

`racines(4, -12, 9)` : $\Delta = 0$: renvoie `[1.5]`.

`racines(1, 2, 5)` : $\Delta = -16 < 0$: renvoie `[]`.

Les valeurs coïncident avec l'exercice 1.

Question 2

Quand `delta < 0`, aucune des deux conditions n'est vérifiée : la fonction renvoie la liste vide `[]`, ce qui signifie que l'équation n'a **aucune solution réelle**.

Question 3

La condition de la liste est celle de l'inéquation. $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) \leq 0 \iff x \in [-1; 2]$.

```
[x for x in range(-5, 6) if x*x - x - 2 <= 0]
```

Cette liste vaut `[-1, 0, 1, 2]`.

Exercice 8 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. L'ensemble solution de $x^2 \geq 9$ est $[3; +\infty[$.
2. Si $\Delta < 0$ et $a < 0$, alors la fonction est strictement négative pour tout réel.
3. L'équation $x^2 = -4$ admet deux solutions.
4. L'équation $(x - 1)(x + 2) = 0$ a pour solutions 1 et -2 .

Correction de l'exercice 8

Affirmation 1

 $x^2 \geq 9 \iff x \leq -3$ ou $x \geq 3$. Par exemple $x = -4$ convient.**Faux.** $S =]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[$.

Affirmation 2

Si $\Delta < 0$, la fonction est du signe de a pour tout réel. Ici $a < 0$: elle est strictement négative.**Vrai.**

Affirmation 3

Un carré est positif ou nul : $x^2 = -4$ n'a aucune solution réelle.**Faux.**

Affirmation 4

Un produit est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul : $x = 1$ ou $x = -2$.**Vrai.****Exercice 9 (★★) : racine évidente**

1. Vérifier que 1 est racine de $2x^2 - 7x + 5$, puis trouver l'autre racine **sans calculer Δ** .
2. (Approfondissement du programme.) Vérifier que 1 est racine de $x^3 - 7x + 6$. Trouver des réels a, b, c tels que $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$, puis résoudre $x^3 - 7x + 6 = 0$.

Correction de l'exercice 9

Question 1

 $2 - 7 + 5 = 0$: 1 est racine. Le produit des racines vaut $\frac{c}{a} = \frac{5}{2}$, donc l'autre racine est $\frac{5}{2}$.

Les racines sont 1 et $\frac{5}{2}$.

Question 2

$1 - 7 + 6 = 0$: 1 est racine.

On développe $(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$ et on identifie : $a = 1$, $b - a = 0$, $c - b = -7$, $-c = 6$.

Donc $a = 1$, $b = 1$, $c = -6$: $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6)$.

$x^2 + x - 6 = 0$: $\Delta = 25$, $x = \frac{-1 - 5}{2} = -3$ ou $x = \frac{-1 + 5}{2} = 2$.

$S = \{-3; 1; 2\}$.

Exercice 10 (★★) : logique du second degré

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Écrire la réciproque de l'implication « si $ac < 0$, alors $\Delta > 0$ ». Est-elle vraie ?
2. Écrire la contraposée de « si $\Delta < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution réelle ».
3. La condition « $\Delta \geq 0$ » est-elle nécessaire, suffisante, ou les deux, pour que $f(x) = 0$ ait au moins une solution réelle ?
4. Écrire la négation de « pour tout réel x , $x^2 - 4x + 5 > 0$ ». Laquelle des deux propositions est vraie ?
5. Dans chaque égalité, dire s'il s'agit d'une identité ou d'une équation, et préciser le statut des lettres : $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$; $x^2 + mx + 1 = 0$.

Correction de l'exercice 10

Question 1

Réciproque : « si $\Delta > 0$, alors $ac < 0$ ». Elle est **fausse** : contre-exemple $x^2 + 3x + 1$, pour lequel $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$ mais $ac = 1 > 0$.

Question 2

Contraposée : « si l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution réelle, alors $\Delta \geq 0$ ». Elle est vraie, comme l'implication de départ.

Question 3

Si $\Delta \geq 0$, l'équation a au moins une solution (suffisante). Si l'équation a une solution, alors $\Delta \geq 0$ (nécessaire).

C'est une condition nécessaire **et** suffisante : $\Delta \geq 0 \iff$ l'équation a au moins une solution réelle.

Question 4

Négation : « il existe un réel x tel que $x^2 - 4x + 5 \leq 0$ ». Or $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ et $a = 1 > 0$, donc $x^2 - 4x + 5 > 0$ pour tout réel x .

La proposition de départ est vraie, sa négation est fausse.

Question 5

$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$ est vraie pour tout réel x : c'est une **identité**, et x est une variable.
 $x^2 + mx + 1 = 0$ est une **équation** d'inconnue x , dans laquelle m est un **paramètre**.

Ce qui peut tomber en contrôle

- La **résolution d'une équation** avec Δ et conclusion en S (exercice 1).
- Une **inéquation** avec le signe de a et les racines (exercice 2).
- Une équation ou un **problème qui se ramène au second degré** (exercice 3).
- Une **discussion selon un paramètre** (exercice 4).
- **Somme et produit** des racines, racine évidente (exercices 5 et 9).
- Des questions de **logique** : réciproque, contraposée, négation (exercice 10).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Quelles sont les solutions de $2x^2 - 5x + 2 = 0$?

- A. Aucune solution réelle
- B. $-\frac{1}{2}$ et -2
- C. 1 et 2
- D. $\frac{1}{2}$ et 2 (**bonne réponse**)

Justification : $\Delta = 25 - 16 = 9$, donc $x = \frac{5 \pm 3}{4}$, soit $\frac{1}{2}$ et 2.

2. Quel est l'ensemble solution de $x^2 - 3x - 4 \leq 0$?

- A. $[-1; 4]$ (**bonne réponse**)
- B. $[-4; 1]$
- C. $] - 1; 4[$
- D. $] - \infty; -1] \cup [4; +\infty[$

Justification : Les racines sont -1 et 4 et $a > 0$: la fonction est négative ou nulle entre les racines, bornes comprises.

3. Quel est l'ensemble solution de $x^2 + 2x + 5 > 0$?

- A. L'ensemble vide
- B. $] -1 ; +\infty[$
- C. $\mathbb{R}$ (**bonne réponse**)
- D. $\{-1\}$

Justification : $\Delta = 4 - 20 < 0$ et $a > 0$: la fonction est du signe de a pour tout réel x , donc toujours strictement positive.

4. Quelles sont les solutions de $x(x + 3) = 10$?

- A. 2 et 5
- B. -2 et 5
- C. -5 et 2 (**bonne réponse**)
- D. 3 et 10

Justification : $x(x + 3) = 10 \iff x^2 + 3x - 10 = 0$. Somme -3 , produit -10 : les racines sont -5 et 2 . Vérification : $2 \times 5 = 10$ et $(-5) \times (-2) = 10$.

5. Pour quelles valeurs de m l'équation $x^2 - mx + 4 = 0$ admet-elle une solution double ?

- A. $m = 16$
- B. Seulement $m = 4$
- C. $m = 0$
- D. $m = 4$ ou $m = -4$ (**bonne réponse**)

Justification : $\Delta = m^2 - 16 = 0 \iff m = \pm 4$.