

Fiche 1 : forme canonique, factorisation et variations

Onze exercices pour maîtriser les trois formes d'une fonction polynôme du second degré :

- calcul de discriminants ;
- forme canonique par complétion du carré ;
- factorisation (avec Δ , puis directe) ;
- sommet, axe de symétrie, variations, extremum ;
- démonstration de la forme canonique ;
- fonction polynôme définie par trois points ou par ses racines ;
- vrai/faux ;
- signe d'une fonction donnée sous forme factorisée ;
- taux de variation et fonction dérivée.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le discriminant est **calculé et son signe donné** ;
- la formule utilisée est citée ;
- le résultat est **vérifié** (développement, valeur particulière) ;
- la conclusion est une phrase.

Le modèle de rédaction d'une forme canonique

« $f(x) = 2x^2 - 12x + 7$. On factorise 2 dans les termes en x : $f(x) = 2(x^2 - 6x) + 7$. Or $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$, donc $f(x) = 2[(x - 3)^2 - 9] + 7 = 2(x - 3)^2 - 18 + 7 = 2(x - 3)^2 - 11$.

Vérification : $2(x - 3)^2 - 11 = 2x^2 - 12x + 18 - 11 = 2x^2 - 12x + 7$. »

- **Complète le carré** avec $x^2 + 2px = (x + p)^2 - p^2$.
- **Vérifie** en développant.
- Conclut avec la forme canonique **et** le sommet.

Les pièges classiques

- Oublier le **facteur a** dans la forme canonique ou factorisée.
- Se tromper de signe en complétant le carré : $x^2 - 6x$ donne $(x - 3)^2$, et non $(x + 3)^2$.
- Écrire $\Delta = b^2 - 4ac$ avec un signe faux quand a ou c est négatif : remplace avec **des** **parenthèses**.

Le signe de b est un traître : pour $b = -12$, $-b$ vaut $+12$. Dans une forme canonique, c'est pareil : $x - 3$ s'annule en $+3$. Les parenthèses sont tes ceintures de sécurité.

Exercice 1 (★) : calculer des discriminants

Calculer le discriminant de chaque fonction polynôme du second degré et donner le nombre de racines :

a. $2x^2 - 5x + 2$

b. $x^2 + 2x + 5$

c. $4x^2 - 12x + 9$

d. $-x^2 + 4x + 5$

Exercice 2 (★★) : forme canonique

Mettre sous forme canonique par complétion du carré :

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 7$

2. $g(x) = -x^2 + 4x + 1$

3. $h(x) = 3x^2 + 6x - 9$

4. $k(x) = x^2 + 5x + 1$

Exercice 3 (★★) : factoriser

Factoriser :

1. $x^2 - 5x + 6$

2. $2x^2 - x - 3$

3. $9x^2 - 12x + 4$

4. $x^2 - 4x - 12$

5. $x^2 + 1$

Exercice 4 (★★) : sommet et variations

Pour chaque fonction, déterminer la forme canonique, le sommet de la parabole, l'axe de symétrie, les variations et l'extremum :

1. $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$

2. $g(x) = x^2 - 6x + 11$

Exercice 5 (★★★) : démontrer la forme canonique (étape de la démonstration au programme)

Soit $a \neq 0$. Montrer que, pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Exercice 6 (★★) : trouver une fonction polynôme du second degré

Une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par $A(0;1)$, $B(1;0)$ et $C(2;3)$. Déterminer a , b , c , puis factoriser la fonction.

Exercice 7 (★★) : vrai ou faux

Justifier chaque réponse :

1. Une fonction polynôme du second degré de discriminant nul n'a pas de racine.
2. Si $ac < 0$, alors la fonction $ax^2 + bx + c$ a deux racines distinctes.
3. La parabole de $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet pour axe de symétrie la droite $x = -\frac{b}{2a}$.
4. Si $a < 0$, le sommet de la parabole est un minimum.

Exercice 8 (★★) : un polynôme qui s'annule en deux réels

1. Déterminer le polynôme p du second degré tel que $p(1) = 0$, $p(5) = 0$ et $p(0) = 10$.
2. Déterminer le polynôme q du second degré dont les racines sont -2 et 3 et dont le sommet de la parabole a pour ordonnée -25 .
3. (Approfondissement du programme.) Déterminer deux nombres dont la somme vaut 7 et le produit vaut 10 .

Exercice 9 (★★) : factorisation directe

Factoriser **sans** calculer Δ , en indiquant la méthode utilisée :

1. $5x^2 - 10x$
2. $x^2 - 49$
3. $9x^2 - 16$
4. $x^2 - 10x + 25$
5. $x^2 - 7x + 12$
6. $x^2 + 2x - 15$
7. $3x^2 - 5x + 2$
8. $x^2 - 5$

Exercice 10 (★★) : signe d'une fonction donnée sous forme factorisée

Résoudre dans $\mathbb{R}$, **sans** calculer de discriminant :

1. $2(x - 1)(x + 4) \leq 0$
2. $(3 - x)(2x + 1) > 0$
3. $-3(x + 2)(x - 5) < 0$

Exercice 11 (★★) : taux de variation et fonction dérivée

Soit $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

1. Montrer que, pour $u \neq v$, le taux de variation $\frac{f(v) - f(u)}{v - u}$ vaut $-(u + v) + 4$.
2. En déduire les variations de f .
3. On pose $v = u + h$ avec $h \neq 0$. Exprimer le taux de variation en fonction de u et de h . Quand h se rapproche de 0, vers quelle valeur tend-il ? Calculer cette valeur pour $u = 0$, $u = 1$ et $u = 2$.

Ce qui peut tomber en contrôle

- Le **calcul du discriminant** et la **forme canonique par complétion du carré** avec vérification (exercices 1 et 2).
- La **factorisation**, avec ou sans Δ (exercices 3 et 9).
- Le **sommet, l'axe et les variations** (exercice 4).
- Une **fonction définie par des conditions** (exercices 6 et 8).
- Le **signe d'une forme factorisée** (exercice 10).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Une fonction polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 0$. Que peut-on affirmer ?
 - A. Il admet une racine double
 - B. Il n'admet aucune racine
 - C. Il admet deux racines distinctes
 - D. Il n'est jamais factorisable
2. Quelle est la forme canonique de $x^2 - 6x + 5$?
 - A. $(x - 3)^2 + 5$
 - B. $(x - 3)^2 - 4$
 - C. $(x - 6)^2 - 31$
 - D. $(x + 3)^2 - 4$
3. Quel est le sommet de la parabole de $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$?
 - A. $(-2; -27)$
 - B. $(2; -3)$
 - C. $(4; -3)$
 - D. $(2; 5)$
4. La parabole d'une fonction $ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$ admet, à son sommet :
 - A. ni maximum ni minimum
 - B. un maximum
 - C. un minimum
 - D. un point d'inflexion
5. Quelle est la factorisation de $x^2 - 4x - 12$?
 - A. $(x - 2)(x - 6)$
 - B. $(x - 2)(x + 6)$
 - C. $(x + 2)(x - 6)$

D. $(x + 3)(x - 4)$