

Fiche 1 : forme canonique, factorisation et variations

Onze exercices pour maîtriser les trois formes d'une fonction polynôme du second degré :

- calcul de discriminants ;
- forme canonique par complétion du carré ;
- factorisation (avec Δ , puis directe) ;
- sommet, axe de symétrie, variations, extremum ;
- démonstration de la forme canonique ;
- fonction polynôme définie par trois points ou par ses racines ;
- vrai/faux ;
- signe d'une fonction donnée sous forme factorisée ;
- taux de variation et fonction dérivée.

Toutes les corrections sont rédigées comme on l'attend d'une bonne copie :

- le discriminant est **calculé et son signe donné** ;
- la formule utilisée est citée ;
- le résultat est **vérifié** (développement, valeur particulière) ;
- la conclusion est une phrase.

Le modèle de rédaction d'une forme canonique

« $f(x) = 2x^2 - 12x + 7$. On factorise 2 dans les termes en x : $f(x) = 2(x^2 - 6x) + 7$. Or $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$, donc $f(x) = 2[(x - 3)^2 - 9] + 7 = 2(x - 3)^2 - 18 + 7 = 2(x - 3)^2 - 11$.

Vérification : $2(x - 3)^2 - 11 = 2x^2 - 12x + 18 - 11 = 2x^2 - 12x + 7$. »

- **Complète le carré** avec $x^2 + 2px = (x + p)^2 - p^2$.
- **Vérifie** en développant.
- Conclut avec la forme canonique **et** le sommet.

Les pièges classiques

- Oublier le **facteur a** dans la forme canonique ou factorisée.
- Se tromper de signe en complétant le carré : $x^2 - 6x$ donne $(x - 3)^2$, et non $(x + 3)^2$.
- Écrire $\Delta = b^2 - 4ac$ avec un signe faux quand a ou c est négatif : remplace avec **des** **parenthèses**.

Le signe de b est un traître : pour $b = -12$, $-b$ vaut $+12$. Dans une forme canonique, c'est pareil : $x - 3$ s'annule en $+3$. Les parenthèses sont tes ceintures de sécurité.

Exercice 1 (★) : calculer des discriminants

Calculer le discriminant de chaque fonction polynôme du second degré et donner le nombre de racines :

a. $2x^2 - 5x + 2$

b. $x^2 + 2x + 5$

c. $4x^2 - 12x + 9$

d. $-x^2 + 4x + 5$

Correction de l'exercice 1

On utilise $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cas a

$$a = 2, b = -5, c = 2.$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 25 - 16$$

$$\Delta = 9 > 0 : \text{deux racines}$$

Cas b

$$a = 1, b = 2, c = 5.$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = 4 - 20$$

$$\Delta = -16 < 0 : \text{aucune racine}$$

Cas c

$$a = 4, b = -12, c = 9.$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 4 \times 9 = 144 - 144$$

$$\Delta = 0 : \text{une racine double}$$

Cas d

$$a = -1, b = 4, c = 5.$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times (-1) \times 5 = 16 + 20$$

$$\Delta = 36 > 0 : \text{deux racines}$$

Exercice 2 (★★) : forme canonique

Mettre sous forme canonique par complétion du carré :

1. $f(x) = 2x^2 - 12x + 7$

2. $g(x) = -x^2 + 4x + 1$

3. $h(x) = 3x^2 + 6x - 9$

4. $k(x) = x^2 + 5x + 1$

Correction de l'exercice 2**Méthode**

On factorise a dans les termes en x^2 et en x , puis on utilise $x^2 + 2px = (x + p)^2 - p^2$.

Question 1

$$f(x) = 2(x^2 - 6x) + 7 = 2[(x - 3)^2 - 9] + 7 = 2(x - 3)^2 - 18 + 7.$$

$$f(x) = 2(x - 3)^2 - 11$$

Question 2

$$g(x) = -(x^2 - 4x) + 1 = -[(x - 2)^2 - 4] + 1 = -(x - 2)^2 + 4 + 1.$$

$$g(x) = -(x - 2)^2 + 5$$

Question 3

$$h(x) = 3(x^2 + 2x) - 9 = 3[(x + 1)^2 - 1] - 9 = 3(x + 1)^2 - 3 - 9.$$

$$h(x) = 3(x + 1)^2 - 12$$

Question 4

$$x^2 + 5x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}, \text{ donc } k(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 1 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}.$$

$$k(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}$$

$$\text{Vérification pour } k : \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4} = x^2 + 5x + \frac{25}{4} - \frac{21}{4} = x^2 + 5x + 1$$

Exercice 3 (★★) : factoriser

Factoriser :

1. $x^2 - 5x + 6$

2. $2x^2 - x - 3$

3. $9x^2 - 12x + 4$

4. $x^2 - 4x - 12$

5. $x^2 + 1$

Correction de l'exercice 3

Question 1

$$\Delta = 25 - 24 = 1 > 0. \text{ Racines : } x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

Question 2

$$\Delta = 1 + 24 = 25 > 0. \text{ Racines : } x_1 = \frac{1-5}{4} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$2x^2 - x - 3 = 2(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$2x^2 - x - 3 = (x + 1)(2x - 3)$$

Question 3

$$\Delta = 144 - 144 = 0. \text{ Racine double : } x_0 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

$$9x^2 - 12x + 4 = 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$$

$$9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$$

Question 4

$$\Delta = 16 + 48 = 64 > 0. \text{ Racines : } x_1 = \frac{4-8}{2} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{4+8}{2} = 6.$$

$$x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$$

Question 5

$$\Delta = 0 - 4 = -4 < 0.$$

$x^2 + 1$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (★★) : sommet et variations

Pour chaque fonction, déterminer la forme canonique, le sommet de la parabole, l'axe de symétrie, les variations et l'extremum :

1. $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$

2. $g(x) = x^2 - 6x + 11$

Correction de l'exercice 4

Question 1

$$f(x) = -2(x^2 - 4x) - 3 = -2[(x - 2)^2 - 4] - 3 = -2(x - 2)^2 + 8 - 3 = -2(x - 2)^2 + 5.$$

Sommet : $S(2; 5)$. Axe de symétrie : la droite d'équation $x = 2$.

Comme $a = -2 < 0$: f est croissante sur $] -\infty; 2]$ et décroissante sur $[2; +\infty[$.

f admet un maximum égal à 5, atteint en $x = 2$.

Contrôle avec le raccourci : $-\frac{b}{2a} = -\frac{8}{-4} = 2$ et $f(2) = -8 + 16 - 3 = 5$

Question 2

$$g(x) = (x - 3)^2 - 9 + 11 = (x - 3)^2 + 2.$$

Sommet : $S(3; 2)$. Axe de symétrie : $x = 3$.

Comme $a = 1 > 0$: g est décroissante sur $] -\infty; 3]$ et croissante sur $[3; +\infty[$.

g admet un minimum égal à 2, atteint en $x = 3$.

Comme le minimum est strictement positif, $g(x) > 0$ pour tout réel x .

Exercice 5 (★★★) : démontrer la forme canonique (étape de la démonstration au programme)

Soit $a \neq 0$. Montrer que, pour tout réel x :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Correction de l'exercice 5

On factorise par a :

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

On reconnaît le début du carré $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$. Donc :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

En reportant :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \blacksquare$$

Exercice 6 (★★) : trouver une fonction polynôme du second degré

Une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par $A(0;1)$, $B(1;0)$ et $C(2;3)$. Déterminer a , b , c , puis factoriser la fonction.

Correction de l'exercice 6

$A \in$ parabole : $c = 1$.

$B \in$ parabole : $a + b + c = 0$, donc $a + b = -1$.

$C \in$ parabole : $4a + 2b + c = 3$, donc $4a + 2b = 2$, soit $2a + b = 1$.

En soustrayant : $(2a + b) - (a + b) = 1 - (-1)$, donc $a = 2$. Puis $b = -1 - 2 = -3$.

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

Vérification avec C : $2 \times 4 - 6 + 1 = 3$

Factorisation : 1 est racine ($2 - 3 + 1 = 0$) et l'autre racine est $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = 2(x - 1) \left(x - \frac{1}{2}\right) = (x - 1)(2x - 1)$$

Exercice 7 (★★) : vrai ou faux**Justifier chaque réponse :**

1. Une fonction polynôme du second degré de discriminant nul n'a pas de racine.
2. Si $ac < 0$, alors la fonction $ax^2 + bx + c$ a deux racines distinctes.
3. La parabole de $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet pour axe de symétrie la droite $x = -\frac{b}{2a}$.
4. Si $a < 0$, le sommet de la parabole est un minimum.

Correction de l'exercice 7

Affirmation 1

Si $\Delta = 0$, l'équation admet une racine **double** $-\frac{b}{2a}$.**Faux.**

Affirmation 2

Si $ac < 0$, alors $-4ac > 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.**Vrai.**

Affirmation 3

La forme canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$ est symétrique par rapport à $x = \alpha = -\frac{b}{2a}$.**Vrai.**

Affirmation 4

Si $a < 0$, la parabole est « tournée vers le bas » : le sommet est un **maximum**.**Faux.****Exercice 8 (★★) : un polynôme qui s'annule en deux réels**

1. Déterminer le polynôme p du second degré tel que $p(1) = 0$, $p(5) = 0$ et $p(0) = 10$.
2. Déterminer le polynôme q du second degré dont les racines sont -2 et 3 et dont le sommet de la parabole a pour ordonnée -25 .
3. (Approfondissement du programme.) Déterminer deux nombres dont la somme vaut 7 et le produit vaut 10 .

Correction de l'exercice 8

Question 1

p s'annule en 1 et 5, donc $p(x) = a(x-1)(x-5)$ avec $a \neq 0$.

$$p(0) = a \times (-1) \times (-5) = 5a = 10, \text{ donc } a = 2.$$

$$p(x) = 2(x^2 - 6x + 5) = 2x^2 - 12x + 10.$$

$$p(x) = 2x^2 - 12x + 10. \text{ On vérifie : } p(1) = 2 - 12 + 10 = 0 \text{ et } p(5) = 50 - 60 + 10 = 0.$$

Question 2

$$q(x) = a(x+2)(x-3). \text{ L'abscisse du sommet est la moyenne des racines : } \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$q\left(\frac{1}{2}\right) = a \times \frac{5}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4}a = -25, \text{ donc } a = 4.$$

$$q(x) = 4(x+2)(x-3) = 4x^2 - 4x - 24.$$

Question 3

Ces nombres sont les racines de $x^2 - Sx + P = x^2 - 7x + 10$ avec $S = 7$ et $P = 10$.

$$\Delta = 49 - 40 = 9 : x = \frac{7-3}{2} = 2 \text{ ou } x = \frac{7+3}{2} = 5.$$

Les deux nombres sont 2 et 5.

Exercice 9 (★★) : factorisation directe

Factoriser **sans calculer** Δ , en indiquant la méthode utilisée :

1. $5x^2 - 10x$

2. $x^2 - 49$

3. $9x^2 - 16$

4. $x^2 - 10x + 25$

5. $x^2 - 7x + 12$

6. $x^2 + 2x - 15$

7. $3x^2 - 5x + 2$

8. $x^2 - 5$

Correction de l'exercice 9

Question 1

Facteur commun $5x$ ($c = 0$).

$$5x^2 - 10x = 5x(x - 2)$$

Question 2

Différence de deux carrés ($b = 0$) : $x^2 - 7^2$.

$$x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$$

Question 3

$$9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2.$$

$$9x^2 - 16 = (3x - 4)(3x + 4)$$

Question 4

Identité remarquable : $x^2 - 2 \times 5x + 5^2$.

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

Question 5

On cherche deux entiers de somme 7 et de produit 12 : 3 et 4.

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

Question 6

On cherche deux entiers de somme -2 et de produit -15 : -5 et 3 . Les racines sont donc 5 et -3 .

$$x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x + 5)$$

Question 7

$a + b + c = 3 - 5 + 2 = 0$: 1 est racine et l'autre racine est $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. Donc $3x^2 - 5x + 2 = 3(x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

$$3x^2 - 5x + 2 = (x - 1)(3x - 2)$$

Vérification : $(x - 1)(3x - 2) = 3x^2 - 2x - 3x + 2 = 3x^2 - 5x + 2$

Question 8

$b = 0$ et 5 est le carré de $\sqrt{5}$.

$$x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

Exercice 10 (★★) : signe d'une fonction donnée sous forme factorisée

Résoudre dans $\mathbb{R}$, sans calculer de discriminant :

1. $2(x - 1)(x + 4) \leq 0$
2. $(3 - x)(2x + 1) > 0$
3. $-3(x + 2)(x - 5) < 0$

Correction de l'exercice 10

Question 1

Les racines sont 1 et -4 , rangées dans l'ordre croissant : $-4 < 1$. Le coefficient de x^2 est $a = 2 > 0$: la fonction est négative ou nulle **entre** les racines.

$$S = [-4; 1]$$

Question 2

Les facteurs s'annulent en 3 et en $-\frac{1}{2}$. Le coefficient de x^2 est $(-1) \times 2 = -2 < 0$: la fonction est strictement positive **entre** les racines.

$$S = \left] -\frac{1}{2}; 3 \right[$$

Contrôle : pour $x = 0$, $(3 - 0)(0 + 1) = 3 > 0$ et $0 \in S$

Question 3

Les racines sont -2 et 5 , et $a = -3 < 0$: la fonction est positive entre les racines, donc strictement négative à l'**extérieur**.

$$S =]-\infty; -2[\cup]5; +\infty[$$

Contrôle : pour $x = 0$, $-3 \times 2 \times (-5) = 30 > 0$ et $0 \notin S$

Exercice 11 (★★) : taux de variation et fonction dérivée

Soit $f(x) = -x^2 + 4x + 1$.

1. Montrer que, pour $u \neq v$, le taux de variation $\frac{f(v) - f(u)}{v - u}$ vaut $-(u + v) + 4$.
2. En déduire les variations de f .
3. On pose $v = u + h$ avec $h \neq 0$. Exprimer le taux de variation en fonction de u et de h . Quand h se rapproche de 0, vers quelle valeur tend-il ? Calculer cette valeur pour $u = 0$, $u = 1$ et $u = 2$.

Correction de l'exercice 11

Question 1

$f(v) - f(u) = -(v^2 - u^2) + 4(v - u) = (v - u)[-(v + u) + 4]$. On divise par $v - u \neq 0$.

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = -(u + v) + 4$$

Question 2

Si $u < v \leq 2$: $u + v < 4$, donc $-(u + v) + 4 > 0$: f est croissante sur $] -\infty ; 2]$. Si $2 \leq u < v$: $u + v > 4$, donc le taux est négatif : f est décroissante sur $[2 ; +\infty[$.

f est croissante sur $] -\infty ; 2]$, décroissante sur $[2 ; +\infty[$, de maximum $f(2) = 5$.

Question 3

Avec $v = u + h$: $-(2u + h) + 4 = -2u + 4 - h$. Quand h se rapproche de 0, le taux se rapproche de $-2u + 4$. C'est le **nombre dérivé** de f en u : $f'(u) = -2u + 4$. Par exemple, pour $u = 1$ et $h = 0,1$: $\frac{f(1,1) - f(1)}{0,1} = \frac{4,19 - 4}{0,1} = 1,9$, proche de 2.

$f'(0) = 4$, $f'(1) = 2$, $f'(2) = 0$: la fonction dérivée $f'(x) = -2x + 4$ s'annule au sommet, en $x = 2$.

Ce qui peut tomber en contrôle

- Le **calcul du discriminant** et la **forme canonique par complétion du carré** avec vérification (exercices 1 et 2).
- La **factorisation**, avec ou sans Δ (exercices 3 et 9).
- Le **sommet, l'axe et les variations** (exercice 4).
- Une **fonction définie par des conditions** (exercices 6 et 8).
- Le **signe d'une forme factorisée** (exercice 10).

QCM : une seule bonne réponse par question

1. Une fonction polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 0$. Que peut-on affirmer ?

- A. Il admet une racine double (bonne réponse)
- B. Il n'admet aucune racine
- C. Il admet deux racines distinctes
- D. Il n'est jamais factorisable

Justification : Quand $\Delta = 0$, la racine double est $-\frac{b}{2a}$ et la fonction s'écrit $a(x - x_0)^2$.

2. Quelle est la forme canonique de $x^2 - 6x + 5$?

- A. $(x - 3)^2 + 5$
- B. $(x - 3)^2 - 4$ (**bonne réponse**)
- C. $(x - 6)^2 - 31$
- D. $(x + 3)^2 - 4$

Justification : On complète le carré : $x^2 - 6x = (x - 3)^2 - 9$, donc $x^2 - 6x + 5 = (x - 3)^2 - 9 + 5 = (x - 3)^2 - 4$. En développant $(x - 3)^2 - 4$, on retrouve $x^2 - 6x + 5$.

3. Quel est le sommet de la parabole de $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$?

- A. $(-2; -27)$
- B. $(2; -3)$
- C. $(4; -3)$
- D. $(2; 5)$ (**bonne réponse**)

Justification : On complète le carré : $-2(x^2 - 4x) - 3 = -2[(x - 2)^2 - 4] - 3 = -2(x - 2)^2 + 5$. Le sommet est $(2; 5)$.

4. La parabole d'une fonction $ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$ admet, à son sommet :

- A. ni maximum ni minimum
- B. **un maximum (bonne réponse)**
- C. un minimum
- D. un point d'inflexion

Justification : Avec $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas : le sommet est le point le plus haut.

5. Quelle est la factorisation de $x^2 - 4x - 12$?

- A. $(x - 2)(x - 6)$
- B. $(x - 2)(x + 6)$
- C. $(x + 2)(x - 6)$ (**bonne réponse**)
- D. $(x + 3)(x - 4)$

Justification : $\Delta = 64$, les racines sont -2 et 6 . Vérification : $(x + 2)(x - 6) = x^2 - 4x - 12$.