

Contrôle : chapitre 1, Second degré

Durée : 45 minutes. **Calculatrice** : autorisée. **Barème** : 20 points.

- Toute réponse doit être **justifiée**.
- La qualité de la rédaction et de la présentation est prise en compte.
- Les résultats seront encadrés ou soulignés.

Exercice 1 (7 points) : Résolutions

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 5x - 3 = 0$. (2 points)
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 4x + 5 = 0$. (1 point)
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 - 5x - 3 \leq 0$. (2 points)
4. Factoriser $3x^2 - 12x + 12$ puis donner son signe. (2 points)

Correction de l'exercice 1, question 1

Question 1 (2 points)

On calcule le discriminant : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$.

L'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$.

$$S = \left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}.$$

Barème : 1 point pour le calcul de Δ ; 1 point pour les deux solutions.

Correction de l'exercice 1, question 2

Question 2 (1 point)

$$\Delta = 16 - 20 = -4 < 0.$$

L'équation n'a **aucune solution réelle**.

Barème : 1 point pour $\Delta < 0$ et la conclusion.

Correction de l'exercice 1, question 3

Question 3 (2 points)

Le trinôme a pour racines $-\frac{1}{2}$ et 3 et son coefficient dominant 2 est positif.

Il est donc **négatif entre les racines**.

$$S = \left[-\frac{1}{2}; 3\right].$$

Barème : 1 point pour le signe du trinôme (coefficient dominant) ; 1 point pour l'ensemble solution avec les bons crochets.

Correction de l'exercice 1, question 4

Question 4 (2 points)

$$3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2.$$

Ce trinôme est **positif ou nul** sur $\mathbb{R}$ et s'annule uniquement en $x = 2$.

Barème : 1 point pour la factorisation ; 1 point pour le signe.

Exercice 2 (7 points) : Forme canonique et variations

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$.

1. Montrer que $f(x) = -2(x - 2)^2 + 5$. (2 points)
2. Dresser le tableau de variations de f et préciser son extremum. (2 points)
3. Résoudre $f(x) = 0$. (2 points)
4. Suivant les valeurs du réel k , donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$. (1 point)

Correction de l'exercice 2, question 1

Question 1 (2 points)

$$-2(x - 2)^2 + 5 = -2(x^2 - 4x + 4) + 5 = -2x^2 + 8x - 8 + 5 = -2x^2 + 8x - 3 = f(x).$$

Barème : 1 point pour le développement ; 1 point pour la conclusion.

Correction de l'exercice 2, question 2

Question 2 (2 points)

Le coefficient dominant est $-2 < 0$: f est croissante sur $] -\infty ; 2]$ puis décroissante sur $[2 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$\nearrow$	5	$\searrow$

f admet un **maximum** égal à 5, atteint en $x = 2$.

Barème : 1 point pour les variations ; 1 point pour le maximum et son abscisse.

Correction de l'exercice 2, question 3

Question 3 (2 points)

$$\Delta = 8^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = 64 - 24 = 40 > 0 \text{ et } \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

$$x_1 = \frac{-8 - 2\sqrt{10}}{-4} = 2 + \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-8 + 2\sqrt{10}}{-4} = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$S = \left\{ 2 - \frac{\sqrt{10}}{2}; 2 + \frac{\sqrt{10}}{2} \right\}.$$

Barème : 1 point pour le discriminant ; 1 point pour les solutions simplifiées.

Correction de l'exercice 2, question 4

Question 4 (1 point)

Le maximum de f vaut 5 : l'équation $f(x) = k$ a deux solutions si $k < 5$, une seule si $k = 5$ et aucune si $k > 5$.

Barème : 1 point pour les trois cas.

Exercice 3 (6 points) : Un enclos rectangulaire

Un élève dispose de 40 mètres de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire dont un côté est un mur (le grillage couvre les trois autres côtés). On note x la longueur en mètres des deux côtés perpendiculaires au mur, avec $0 < x < 20$.

1. Exprimer l'aire $A(x)$ de l'enclos en fonction de x . (1 point)
2. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire est maximale et la valeur de ce maximum. (2 points)
3. Pour quelles valeurs de x l'aire est-elle supérieure ou égale à 192 m^2 ? (2 points)
4. Quelles sont les dimensions de l'enclos d'aire maximale ? (1 point)

Correction de l'exercice 3, question 1

Question 1 (1 point)

Le côté parallèle au mur mesure $40 - 2x$ mètres.

$$A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x.$$

Barème : 1 point pour la longueur $40 - 2x$ et l'aire.

Correction de l'exercice 3, question 2

Question 2 (2 points)

$A(x) = -2(x - 10)^2 + 200$. Le coefficient dominant est négatif : le maximum est atteint en $x = 10$.

L'aire maximale vaut 200 m^2 , obtenue pour $x = 10$.

Barème : 1 point pour la forme canonique ou l'abscisse du sommet ; 1 point pour le maximum.

Correction de l'exercice 3, question 3

Question 3 (2 points)

$$A(x) \geq 192 \iff -2x^2 + 40x - 192 \geq 0 \iff x^2 - 20x + 96 \leq 0.$$

$$\Delta = 400 - 384 = 16 \text{ donc les racines sont } \frac{20 - 4}{2} = 8 \text{ et } \frac{20 + 4}{2} = 12.$$

Le trinôme est négatif entre ses racines : $x \in [8; 12]$.

Barème : 1 point pour la mise en inéquation et les racines ; 1 point pour la conclusion.

Correction de l'exercice 3, question 4

Question 4 (1 point)

Pour $x = 10$, l'autre côté mesure $40 - 2 \times 10 = 20$.

L'enclos mesure 10 m sur 20 m.

Barème : 1 point pour les deux dimensions.

Récapitulatif du barème

Exercice	Points
Exercice 1	7
Exercice 2	7
Exercice 3	6
Total	20